MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Nech $ABCD$ je štvorec a E priesečník jeho uhlopriečok. Podľa akej priamky treba štvorec preložiť, aby bod A prešiel do bodu E?

N2 Nech ABC je trojuholník. Nájdite všetky body X také, že trojuholníky ABC a ABX majú rovnaký obsah.

N3 Lichobežník rozrežeme pozdĺž uhlopriečky. Ktorý zo vzniknutých trojuholníkov má väčší obsah?

N4 Dokážte, že priamka prechádzajúca priesečníkom uhlopriečok rovnobežníka ho delí na dva zhodné útvary.

N5 Dokážte, že deltoid, ktorý má dve protiľahlé strany rovnobežné, je kosoštvorec.

N6 Je možné, aby v situácii zo súťažnej úlohy nastalo $|PB| > |AP|$?

N7 Uvažujme situáciu zo zadania súťažnej úlohy s tým, že $a = 3b = 3$. Vypočítajte obsah trojuholníka PBC.

D1 Nech $ABCD$ je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a priesečníkom uhlopriečok P. Nech obsah trojuholníka ABP je 16 a obsah trojuholníka BCP je 10. Vypočítajte obsah trojuholníka ADP.

D2 Daný je štvorec so stranou dĺžky 6. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah 12. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

D3 Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dĺžky 1. Nech K a L sú stredy strán DA, resp. DC. Nech P je bod strany AB taký, že $|BP| = 2\,|AP|$. Nech Q je bod strany BC taký, že $|CQ| = 2\,|BQ|$. Nech X je priesečník úsečiek KQ a PL. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$, $LDKX$ označme postupne S_A, S_B, S_C, S_D.

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.

b) Vypočítajte $S_C - S_A$.

c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.

2

N1 Ktoré prirodzené čísla majú súčet 16 a rozdiel 6?

N2 Nech a, b, c sú prirodzené čísla také, že $a + b$ aj $b + c$ sú násobky 7. Dokážte, že potom aj $a - c$ je násobok 7.

N3 Nech k je nepárne prirodzené číslo a a a b sú také prirodzené čísla, že $a + b$ aj $a - b$ sú násobky čísla k. Dokážte, že potom a aj b sú násobky čísla k.

N4 Nech a, b, c, d, e sú prirodzené čísla také, že $a + b + c$, $b + c + d$, $c + d + e$, $d + e + a$, $e + a + b$ sú násobky 11. Dokážte, že aj $a + b + c + d + e$ je násobok 11.

D1 V obchode predávali balíčky po 15, 30, 45, 85, 120 a 165 guľôčkach. Bob a Bobek si jeden z balíčkov kúpili a guľôčky si rozdelili tak, že Bob ich mal o 17 viac ako Bobek. Ktoré z balíčkov si mohli kúpiť?

D2 Pre aké dvojice celých čísel (k, l) má sústava $a + b = k$, $a - b = l$ riešenie v obore celých čísel?

D3 Dokážte, že hodnoty výrazov $23x + y$ a $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel (x, y).

D4 Dané je párne číslo s väčšie než 2. Nech a a b sú prirodzené čísla také, že platí $a > b$, číslo $a + b$ je deliteľné číslom $s - 1$ a číslo $a - b$ je deliteľné číslom $s + 1$.

a) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a + b$.

b) Dokážte, že obe čísla $a + 10b$ aj $b + 10a$ sú deliteľné číslom $s^2 - 1$.

3

N1 Určte všetky celé čísla n také, že $7/(n + 2)$ je celé číslo.

N2 Určte všetky celé čísla n také, že

a) $\frac{n+3}{n-2}$;

b) $\frac{2n+3}{n-2}$;

c) $\frac{n+3}{2n+1}$

celé číslo.

N3 Nájdite všetky riešenia rovnice $ab + a + b = 21$ v množine prirodzených čísel.

N4 Nájdite všetky kladné prirodzené riešenia rovnice $6mn - 4n + 3m = 23$.

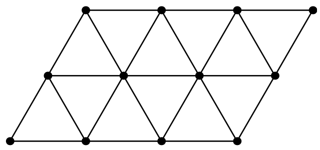
N5 Uvažujme v súťažnej úlohe obdĺžnik 20×30. Koľko úsečiek jednotkovej dĺžky potrebujeme na jeho rozdelenie?

D1 Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n) také, že hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

D2 Rovnobežník so stranami dĺžok 2 a 3 a jedným uhlom veľkosti 60° je možné rozdeliť 13 jednotkovými úsečkami ako na obrázku na rovnostranné trojuholníky so stranou dĺžky 1. Ktoré rovnobežníky s celočíselnými dĺžkami strán a jedným uhlom veľkosti 60° možno takto rozdeliť na rovnostranné trojuholníky so stranou dĺžky 1 pomocou 333 jednotkových úsečiek?



D3 Nájdite všetky celočíselné riešenia (a, b, c), kde $a \le b \le c$, rovnice

$$abc + a + b + c = 6 + ab + ac + bc.$$

D4 Na tabuli je napísaných 5 (nie nutne rôznych) prvočísel, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla.

4

N1 Pavol má v zošite nakreslenú štvorcovú tabuľku 3×3 a chce ju vyfarbiť dvoma farbami – bielou a červenou.

a) Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať práve 1 červený štvorec a 8 bielych štvorcov?

b) Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať 2 červené a 7 bielych štvorcov?

c) Koľko je celkovo možností, ako vyfarbiť tabuľku dvoma farbami?

N2 Michal má v zošite nakreslenú obdĺžnikovú tabuľku 3×6 a chce ju vyfarbiť dvoma farbami. Tabuľku má rozdelenú na dva zhodné štvorce 3×3. Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať v každom z nich 2 červené a 7 bielych menších štvorcov?

N3 Koľkými spôsobmi je možné vpísať jednotky a nuly do tabuľky 2×3 tak, aby každý štvorec 2×2 obsahoval práve 2 nuly a 2 jednotky?

D1 Marienka chce ušiť patchworkovú štvorcovú prikrývku zloženú z 9 menších štvorcov modrej alebo bielej farby. Prikrývky, ktoré dostaneme otočením jednej z druhej, považujeme za rovnaké. Koľkými spôsobmi môže prikrývku ušiť, ak použije

a) 1 modrý a 8 bielych štvorcov;

b) 2 modré a 7 bielych štvorcov?

D2 Tabuľku 4×4 vypĺňame jednotkami a nulami. V každom štvorci 2×2 sú 2 nuly a 2 jednotky. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

D3 Šachovnicovo zafarbenú tabuľku 4×4 vypĺňame jednotkami a nulami. V každom z deviatich štvorcov 2×2 je rovnaký počet núl. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

D4 Tomáš postupne niekoľkokrát vyplnil tabuľku 5×4 tak, že v každom štvorčeku 2×2 bolo každé z čísel 1, 2, 3, 4 práve raz. Po každom vyplnení si zapísal súčet všetkých čísel v tabuľke. Koľko najviac rôznych súčtov mohol takto získať?

D5 Označme m počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme n počet tých vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $n : m$.

5

N1 Nech ABC je trojuholník. Označme K, L, M postupne stredy jeho strán AB, BC, CA. Dokážte, že ťažnica KC rozpoľuje strednú priečku LM.

N2 Nech $ABCD$ je rovnobežník. Označme S priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že rovnobežka so stranou AB prechádzajúca bodom S pretne stranu DA v jej strede.

N3 Nech $ABCD$ a $ABEF$ sú dva rovnobežníky s rovnakou základňou a rovnakou výškou ležiacou v rovnakej polrovine určenej priamkou AB. Nech S a R sú postupne priesečníky ich uhlopriečok. Dokážte, že RS je rovnobežná s AB.

N4 Nech ABC je trojuholník, D je stred strany AB trojuholníka ABC a E bod jeho strany AC taký, že $|AE| = 2\,|CE|$. Označme F priesečník priamok BE a CD. Ukážte, že platí $|BE| = 4\,|EF|$.

D1 Nech $ABCD$ je štvoruholník a K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA. Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník.

D2 Nech $ABCD$ je lichobežník. Stred jeho základne AB označme P. Nech K je bod úsečky AD a L, M, N postupne priesečníky úsečiek PD, PC, BC s rovnobežkou so základňou AB cez K.

a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určte polohu bodu K na úsečke AB tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$.

D3 Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD s dĺžkami 18, resp. 6. Nech E je bod strany AB taký, že $2\,|AE| = |EB|$. Nech body K, L, M, ktoré sú postupne ťažiskami trojuholníkov ADE, CDE, BCE, tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.

a) Dokážte, že priamky KM a CM zvierajú pravý uhol.

b) Vypočítajte dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$.

6

N1 Číslo 49 je rovné súčtu svojho ciferného súčinu a svojho ciferného súčtu: $49 = 4 \cdot 9 + (4 + 9)$. Koľko dvojciferných čísel má túto vlastnosť?

N2 Nájdite všetky riešenia rovnice $11x = 7y$ v množine prirodzených čísel.

N3 Dvojciferné číslo s nenulovými ciframi nazveme *štvorcové* práve vtedy, keď pripočítaním čísla s obráteným poradím cifier dostaneme druhú mocninu prirodzeného čísla. Koľko štvorcových čísel existuje?

D1 Nájdite najväčší 5-ciferný palindróm deliteľný číslom 101.

D2 Určte počet všetkých 5-ciferných palindrómov deliteľných číslom 37.

D3 Nájdite všetky štvorciferné čísla také, že v jeho zápise sú dve rôzne cifry, každá dvakrát, je deliteľné 7 a číslo, ktoré vznikne otočením poradia jeho cifier, je tiež štvorciferné a je deliteľné 7.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Nech $ABCD$ je štvorec a E priesečník jeho uhlopriečok. Podľa akej priamky treba štvorec preložiť, aby bod A prešiel do bodu E?

Riešenie:

Podľa osi úsečky AE.

N2 Nech ABC je trojuholník. Nájdite všetky body X také, že trojuholníky ABC a ABX majú rovnaký obsah.

Riešenie:

Všetky také body tvoria dve priamky rovnobežné s AB ležiace v rovnakej vzdialenosti od tejto priamky ako bod C. Trojuholníky s rovnakou základňou majú totiž rovnaký obsah práve vtedy, keď majú rovnakú výšku.

N3 Lichobežník rozrežeme pozdĺž uhlopriečky. Ktorý zo vzniknutých trojuholníkov má väčší obsah?

Riešenie:

Ten, ktorý obsahuje dlhšiu základňu, pretože majú rovnakú výšku na základne lichobežníka.

N4 Dokážte, že priamka prechádzajúca priesečníkom uhlopriečok rovnobežníka ho delí na dva zhodné útvary.

Riešenie:

Rovnobežník je stredovo súmerný podľa svojho stredu a súmerná podľa neho je aj ľubovoľná ním prechádzajúca priamka. Preto sú podľa tohto stredu súmerné aj vzniknuté útvary, sú teda zhodné.

N5 Dokážte, že deltoid, ktorý má dve protiľahlé strany rovnobežné, je kosoštvorec.

Riešenie:

Nech $ABCD$ je deltoid taký, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |AD|$ a AB je rovnobežné s CD. Z tejto rovnobežnosti vyplýva $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD|$. Trojuholníky ABC a ACD sú teda oba rovnoramenné so spoločnou základňou AC a s rovnakým uhlom pri základni, sú teda sú zhodné podľa vety *usu*. Štvoruholník $ABCD$ má tak všetky štyri strany rovnako dlhé, je to teda naozaj kosoštvorec.

N6 Je možné, aby v situácii zo súťažnej úlohy nastalo $|PB| > |AP|$?

Riešenie:

Nie je to možné, lebo z osovej súmernosti podľa priamky PR máme $|AP| = |PC|$. Zároveň PC je prepona pravouhlého trojuholníka PBC, t. j. jeho najdlhšia strana a PB je jeho odvesna.

N7 Uvažujme situáciu zo zadania súťažnej úlohy s tým, že $a = 3b = 3$. Vypočítajte obsah trojuholníka PBC.

Riešenie:

Pravouhlý trojuholník PBC má strany dĺžok x, $3 - x$ a 1. Z Pytagorovej vety dostaneme $(3 - x)^2 + 1 = x^2$ a po úprave (kvadratické členy sa odčítajú) $x = \frac{5}{3}$. Obsah trojuholníka PBC je preto $\frac{2}{3}$.

D1 Nech $ABCD$ je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a priesečníkom uhlopriečok P. Nech obsah trojuholníka ABP je 16 a obsah trojuholníka BCP je 10. Vypočítajte obsah trojuholníka ADP.

Riešenie:

Obsah trojuholníka ABC je rovnaký ako obsah trojuholníka ABD, pretože tieto trojuholníky majú zhodné základne a rovnakú výšku (rovnú vzdialenosti oboch základní). Obsah trojuholníka ABC je súčet obsahov trojuholníkov ABP a BPC, teda 26. Obsah trojuholníka ABD je preto tiež 26. Obsah trojuholníka ADP je rozdiel obsahov trojuholníkov ABD a ABP, teda je to 10.

D2 Daný je štvorec so stranou dĺžky 6. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah 12. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

Riešenie:

60-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=371#page=1).

D3 Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dĺžky 1. Nech K a L sú stredy strán DA, resp. DC. Nech P je bod strany AB taký, že $|BP| = 2\,|AP|$. Nech Q je bod strany BC taký, že $|CQ| = 2\,|BQ|$. Nech X je priesečník úsečiek KQ

a PL. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$, $LDKX$ označme postupne S_A, S_B, S_C, S_D.

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.

b) Vypočítajte $S_C - S_A$.

c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.

Riešenie:

60-C-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=368#page=2).

2

N1 Ktoré prirodzené čísla majú súčet 16 a rozdiel 6?

Riešenie:

Čísla označme a a b. Potom $a + b = 16$ a $a - b = 6$, takže

$$2a = (a + b) + (a - b) = 16 + 6 = 22,$$

$$2b = (a + b) - (a - b) = 16 - 6 = 10,$$

a teda $a = 11$, $b = 5$.

N2 Nech a, b, c sú prirodzené čísla také, že $a + b$ aj $b + c$ sú násobky 7. Dokážte, že potom aj $a - c$ je násobok 7.

Riešenie:

Platí $a - c = (a + b) - (b + c)$, čo je rozdiel dvoch čísel deliteľných 7.

N3 Nech k je nepárne prirodzené číslo a a a b sú také prirodzené čísla, že $a + b$ aj $a - b$ sú násobky čísla k. Dokážte, že potom a aj b sú násobky čísla k.

Riešenie:

Zrejme $k \mid (a + b) + (a - b) = 2a$. Keďže k je nepárne, platí $k \mid a$. Potom platí aj $k \mid (a + b) - a = b$.

N4 Nech a, b, c, d, e sú prirodzené čísla také, že $a + b + c$, $b + c + d$, $c + d + e$, $d + e + a$, $e + a + b$ sú násobky 11. Dokážte, že aj $a + b + c + d + e$ je násobok 11.

Riešenie:

Platí

$$(a + b + c) + (b + c + d) + (c + d + e) + (d + e + a) + (e + a + b) = 3(a + b + c + d + e),$$

takže $3(a + b + c + d + e)$ je deliteľné 11. Keďže 3 a 11 sú nesúdeliteľné čísla, $a + b + c + d + e$ je násobok 11.

D1 V obchode predávali balíčky po 15, 30, 45, 85, 120 a 165 guľôčkach. Bob a Bobek si jeden z balíčkov kúpili a guľôčky si rozdelili tak, že Bob ich mal o 17 viac ako Bobek. Ktoré z balíčkov si mohli kúpiť?

Riešenie:

Označme a počet Bobových a b počet Bobkových guľôčok, v balíčku teda bolo $a + b$ guľôčok. Ak $a - b = 17$, číslo $(a - b) + 2a$ čiže $a + b$ je nepárne číslo väčšie ako 17, t. j. 45, 85 alebo 165.

Ak túto hodnotu označíme k, tak

$$a = \frac{1}{2}((a + b) + (a - b)) = \frac{1}{2}(k + 17),$$

$$b = k - a = \frac{1}{2}(k - 17),$$

čo sú prirodzené čísla.

Vyhovujú teda práve počty 45, 85, 165.

D2 Pre aké dvojice celých čísel (k, l) má sústava $a + b = k$, $a - b = l$ riešenie v obore celých čísel?

Riešenie:

Práve vtedy, keď sú čísla k a l obe párne alebo obe nepárne. Vyplýva to ihneď z vyjadrenia $a = k + l/2$, $b = k - l/2$.

D3 Dokážte, že hodnoty výrazov $23x + y$ a $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel (x, y).

Riešenie:

60-C-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=368).

D4 Dané je párne číslo s väčšie než 2. Nech a a b sú prirodzené čísla také, že platí $a > b$, číslo $a + b$ je deliteľné číslom $s - 1$ a číslo $a - b$ je deliteľné číslom $s + 1$.

a) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a + b$.

b) Dokážte, že obe čísla $a + 10b$ aj $b + 10a$ sú deliteľné číslom $s^2 - 1$.

Riešenie:

a) Ukážeme, že hľadaná hodnota je $3s - 3$. Podľa zadania je $a + b$ kladný násobok $s - 1$.

Rovnosť $a + b = s - 1$ nemôže nastať, pretože platí $a + b > a - b$ a pritom z $s + 1 \mid a - b > 0$ vyplýva $a - b \geq s + 1$, takže aj $a + b \geq s + 1$.

V prípade $a + b = 2(s - 1)$ máme $a - b < a + b < 2(s + 1)$, takže $s + 1 \mid a - b$. Vzhľadom na $a - b > 0$ to znamená, že $s + 1 = a - b$. Zo sústavy rovníc $a + b = 2(s - 1)$ a $a - b = s + 1$ však dostávame $a = \frac{1}{2}(3s - 1)$ a $b = \frac{1}{2}(s - 3)$, čo nie sú celé čísla, pretože s je párne, a tak $3s - 1$ aj $s - 3$ sú nepárne čísla.

V prípade $a + b = 3(s - 1)$ môžeme uvažovať $a - b = s + 1$, čo vedie na sústavu rovníc $a + b = 3(s - 1)$ a $a - b = s + 1$. Z toho $a = 2s - 1$ a $b = s - 2$, vzhľadom na podmienku $s > 2$ sú to naozaj dve prirodzené čísla, pritom zrejme $a > b$ (vyplýva to aj z rovnice $a - b = s + 1$).

b) Uplatnením podmienok $s - 1 \mid a + b$ a $s + 1 \mid a - b$ na rovnosti

$$a + sb = (a + b) + (s - 1)b = (a - b) + (s + 1)b$$

dostávame, že číslo $a + sb$ je deliteľné oboma číslami $s - 1$ a $s + 1$, a teda aj ich súčinom $s^2 - 1$, lebo $s - 1$ a $s + 1$ sú nepárne čísla s rozdielom rovným 2, teda sú nesúdeliteľné.

Tvrdenie o druhom čísle $b + sa$ vyplýva podobným postupom z rovností

$$b + sa = (a + b) + (s - 1)a = (s + 1)a - (a - b).$$

3

N1 Určte všetky celé čísla n také, že $7/(n + 2)$ je celé číslo.

Riešenie:

Čísla $n + 2$ je celočíselný deliteľ 7, t. j. $n + 2 \in \{1, 7, -1, -7\}$, a teda ekvivalentne $n \in \{-1, 5, -3, -9\}$.

N2 Určte všetky celé čísla n také, že

a) $\frac{n+3}{n-2}$;

b) $\frac{2n+3}{n-2}$;

c) $\frac{n+3}{2n+1}$

celé číslo.

Riešenie:

a) Platí

$$\frac{n+3}{n-2} = \frac{(n-2)+5}{n-2} = 1 + \frac{5}{n-2},$$

takže $\frac{n+3}{n-2}$ je celé číslo práve vtedy, keď je $\frac{5}{n-2}$ celé číslo, čo je práve vtedy, keď

$$n - 2 \in \{1, 5, -1, -5\},$$

t. j.

$$n \in \{3, 7, 1, -3\}.$$

b) Platí

$$\frac{2n+3}{n-2} = \frac{(2n-4)+7}{n-2} = \frac{2(n-2)+7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2},$$

takže $\frac{2n+3}{n-2}$ je celé číslo práve vtedy, keď je $\frac{7}{n-2}$ celé číslo, čo je práve vtedy, keď

$$n - 2 \in \{1, 7, -1, -7\},$$

t. j.

$$n \in \{3, 9, 1, -5\}.$$

c) Platí

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(n+3)}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot 2n + 62n + 1 = \frac{1}{2} \cdot (2n+1) + 52n + 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2n+1}\right),$$

takže $\frac{n+3}{2n+1}$ je celé číslo práve vtedy, keď je $1 + \frac{5}{2n+1}$ párne celé číslo, t. j. $\frac{5}{2n+1}$ nepárne celé číslo čo je práve vtedy, keď

$$2n + 1 \in \{1, 5, -1, -5\},$$

t. j.

$$2n \in \{0, 4, -2, -6\},$$

t. j.

$$n \in \{0, 2, -1, -3\}.$$

N3 Nájdite všetky riešenia rovnice $ab + a + b = 21$ v množine prirodzených čísel.

Riešenie 1:

Ekvivalentne platí

$$ab + a = 21 - b,$$
$$a(b+1) = 21 - b,$$
$$a = \frac{21 - b}{b+1},$$
$$a = \frac{21 - b}{b+1},$$
$$a = \frac{22 - (b+1)}{b+1},$$
$$a = \frac{22}{b+1} - 1.$$

Odtiaľ $b + 1$ musí byť prirodzený deliteľ čísla 22, takže ekvivalentne

$$b + 1 \in \{1, 2, 11, 22\},$$
$$b \in \{0, 1, 10, 21\},$$

z čoho

$$(a, b) \in \{(0, 21), (1, 10), (10, 1), (21, 0)\},$$

takže vzhľadom na predpokladanú kladnosť

$$(a, b) \in \{((1, 10), (10, 1)\}.$$

Riešenie 2:

Rovnica je ekvivalentná s

$$ab + a + b + 1 = 22,$$
$$(a+1)(b+1) = 2 \cdot 11,$$
$$(a+1, b+1) \in \{(1, 22), (2, 11), (11, 2), (22, 1)\},$$
$$(a, b) \in \{(0, 21), (1, 10), (10, 1), (21, 0)\},$$

takže vzhľadom na predpokladanú kladnosť

$$(a, b) \in \{((1, 10), (10, 1)\}.$$

N4 Nájdite všetky kladné prirodzené riešenia rovnice $6mn - 4n + 3m = 23$.

Riešenie:

Rovnicu upravíme na tvar $(am + b)(cn + d) = e$, pričom a, b, c, d, e sú vhodné celočíselné konštanty. Člen $6mn$ dostaneme ako $3m \cdot 2n$, takže nech $a = 3$ a $b = 2$. Dostávame tak $(3m + b)(2n + d) + e = 23$. Aby sme dostali členy $-4n$ a $3m$ nech $b = -2$ a $d = 1$. Dostávame tak

$$(3m - 2)(2n + 1) = 6mn - 4n + 3m - 2 = (6mn - 4n + 3n) - 2 = 23 - 2 = 21 = 3 \cdot 7.$$

Keďže činiteľ $3m - 2$ nie je deliteľný 3 a je to kladný deliteľ 21, platí ekvivalentne

$$(3m - 2, 2n + 1) \in \{(1, 21), (7, 3)\},$$
$$(3m, 2n) \in \{(3, 20), (9, 2)\},$$
$$(m, n) \in \{(1, 10), (3, 1)\}.$$

N5 Uvažujme v súťažnej úlohe obdĺžnik 20×30. Koľko úsečiek jednotkovej dĺžky potrebujeme na jeho rozdelenie?

Riešenie:

Počet zvislých úsečiek je $20 \cdot 29$ čiže 580 a vodorovných $19 \cdot 30$ čiže 570, spolu je to 1150.

D1 Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n) také, že hodnota výrazu

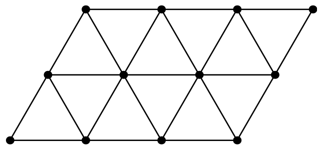
$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

Riešenie:

58-B-I-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=29#page=7).

D2 Rovnobežník so stranami dĺžok 2 a 3 a jedným uhlom veľkosti 60° je možné rozdeliť 13 jednotkovými úsečkami ako na obrázku na rovnostranné trojuholníky so stranou dĺžky 1. Ktoré rovnobežníky s celočíselnými dĺžkami strán a jedným uhlom veľkosti 60° možno takto rozdeliť na rovnostranné trojuholníky so stranou dĺžky 1 pomocou 333 jednotkových úsečiek?



Riešenie:

Dĺžky strán takéhoto rovnobežníka označme a a b, pričom $a \leq b$. Platí teda

$$ab + a(b - 1) + b(a - 1) = 333,$$

po ekvivalentnej úprave

$$(3a - 1)(3b - 1) = 1000$$

z čoho ekvivalentne

$$(a, b) \in \{(1, 167), (2, 67), (3, 42), (7, 17)\}.$$

D3 Nájdite všetky celočíselné riešenia (a, b, c), kde $a \leq b \leq c$, rovnice

$$abc + a + b + c = 6 + ab + ac + bc.$$

Riešenie:

Rovnicu ekvivalentne upravíme na tvar

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 5,$$

z čoho ekvivalentne

$$(a, b, c) \in \{(2, 2, 6), (-4, 0, 2), (0, 0, 6)\}.$$

D4 Na tabuli je napísaných 5 (nie nutne rôznych) prvočísel, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla.

Riešenie:

70-A-I-1a (https://skmo.sk/dokument.php?id=3467).

4

N1 Pavol má v zošite nakreslenú štvorcovú tabuľku 3×3 a chce ju vyfarbiť dvoma farbami – bielou a červenou.

a) Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať práve 1 červený štvorec a 8 bielych štvorcov?

b) Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať 2 červené a 7 bielych štvorcov?

c) Koľko je celkovo možností, ako vyfarbiť tabuľku dvoma farbami?

Riešenie:

a) Červený štvorec môže byť na 9 miestach, takže spôsobov je 9.

b) Prvý červený štvorec môže byť na 9 miestach, druhý na 8. Keďže však nezáleží na poradí týchto štvorcov, možností je teda $9 \cdot 8 : 2$ čiže 36.

c) Každý štvorec možno nezávisle od každého iného štvorca zafarbiť 2 spôsobmi, celkový počet zafarbení 9 štvorcov je teda 2^9 čiže 512.

N2 Michal má v zošite nakreslenú obdĺžnikovú tabuľku 3×6 a chce ju vyfarbiť dvoma farbami. Tabuľku má rozdelenú na dva zhodné štvorce 3×3. Koľkými spôsobmi môže tabuľku vyfarbiť, ak chce mať v každom z nich 2 červené a 7 bielych menších štvorcov?

Riešenie:

Každý zo štvorcov je podľa úlohy N1 možné vyfarbiť 36 spôsobmi. Každú možnosť zafarbenia ľavého štvorca je možné skombinovať s každou možnosťou zafarbenia pravého štvorca, preto všetkých zafarbení je $36 \cdot 36$ čiže 1296.

N3 Koľkými spôsobmi je možné vpísať jednotky a nuly do tabuľky 2×3 tak, aby každý štvorec 2×2 obsahoval práve 2 nuly a 2 jednotky?

Riešenie:

Vyplníme najskôr prostredný stĺpec. Ak v ňom budú 2 nuly alebo 2 jednotky, tak už je vyplnenie ľavého a pravého stĺpca jednoznačné. Takto získame 2 možné vyplnenia. Ak v prostrednom stĺpci bude 1 nula a 1 jednotka, tak v každom z dvoch susedných stĺpcov musí byť aj 1 nula a 1 jednotka. Pre každý stĺpec tak máme 2 možnosti, čo je spolu $2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 8 možností.

Celkovo tak máme $2 + 9$ čiže 10 spôsobov zafarbenia.

D1 Marienka chce ušiť patchworkovú štvorcovú prikrývku zloženú z 9 menších štvorcov modrej alebo bielej farby. Prikrývky, ktoré dostaneme otočením jednej z druhej, považujeme za rovnaké. Koľkými spôsobmi môže prikrývku ušiť, ak použije

a) 1 modrý a 8 bielych štvorcov;

b) 2 modré a 7 bielych štvorcov?

Riešenie:

a) Modrý môže byť rohový štvorec, štvorec uprostred strany štvorca alebo štvorec v strede, všetky ďalšie možnosti už dostaneme otočením prikrývky. Existujú teda práve 3 spôsoby.

b) V porovnaní s časťou b) N1 takmer každú možnosť počítame 4-krát, lebo po otočení okolo stredu o 90°, o 180° a o 270° ide stále o tú istú prikrývku. Jedinými výnimkami sú 2 stredovo súmerné prikrývky, lebo sa po otočení okolo stredu o 180° nezmenia. Tieto 2 prikrývky prispievajú počtom 2 do celkového počtu 36, každú zo zvyšných $36 - 2 \cdot 2$ čiže 32 prikrývok započítavame 4-krát, je ich teda $\frac{32}{4}$ čiže 8. Počet rôznych prikrývok je teda $2 + 8$ čiže 10.

D2 Tabuľku 4×4 vypĺňame jednotkami a nulami. V každom štvorci 2×2 sú 2 nuly a 2 jednotky. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

Riešenie:

Ak sú vedľa seba 2 jednotky, potom pod nimi a nad nimi musia byť 2 nuly a pod/nad nimi zase musia byť 2 jednotky. Analogicky, ak sú 2 jednotky nad sebou, tak z oboch strán vedľa nich musia byť len nuly a tak ďalej. Z toho už tiež vyplýva, že ak sú niekde 2 jednotky alebo 2 nuly vedľa seba, tak nemôžu zároveň niekde byť 2 jednotky či nuly pod sebou.

2 z celkového počtu 2^4 čiže 16 vyplnení prvého riadka sú také, že sa striedajú jednotky a nuly. Ostatných 14 potom obsahuje buď 2 nuly alebo 2 jednotky vedľa seba. Tie vyplnenia prvého riadku, ktoré obsahujú dve rovnaké cifry vedľa seba, majú jednoznačné rozšírenie do zvyšku štvorca, pretože pod jednotkami musia byť nuly a pod nulami jednotky. Máme teda 14 vyplnení, v ktorých sa vyskytujú 2 rovnaké cifry vedľa seba. Podobne máme ďalších 14 vyplnení, v ktorých sa vyskytujú 2 rovnaké cifry pod sebou. Zostávajú vyplnenia, v ktorých ani jedna z týchto možností nenastane. Také sú len dve šachovnicové vyplnenia. Celkom je prípustných vyplnení $2 \cdot 14 + 2$ čiže 30.

D3 Šachovnicovo zafarbenú tabuľku 4×4 vypĺňame jednotkami a nulami. V každom z deviatich štvorcov 2×2 je rovnaký počet núl. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

Riešenie:

Tento rovnaký počet núl môže byť jedno z čísel 4, 3, 2, 1, 0. Rozoberme prípady:

- Nech je tento počet 4.

  V tabuľke sú potom samé nuly, takéto možnosť je práve 1.

- Nech je tento počet 3.

  V každom zo štyroch rohových disjunktných štvorcov 2×2 bude práve 1 jednotka, preto do celého štvorca potrebujeme umiestniť práve 4 jednotky. V stredovom štvorci sú celkom 4 možnosti, kam umiestniť 1 jednotku. V 8 políčkach okolo tejto jednotky musia byť samé nuly a ďalšie 3 jednotky je možné umiestniť 3 spôsobmi. Máme teda $4 \cdot 3$ čiže 12 možností.

- Nech je tento počet 2.

  Podľa úlohy D2 je počet možností 30.
- Nech je tento počet 1.

  Tento prípad je analogický prípadu s počtom 3, len sa vymenia úlohy núl a jednotiek.
- Nech je tento počet 0.

  Tento prípad je analogický prípadu s počtom 4, len sa vymenia úlohy núl a jednotiek.

Všetkých možností je teda $1 + 12 + 30 + 12 + 1$ čiže 56.

D4 Tomáš postupne niekoľkokrát vyplnil tabuľku 5×4 tak, že v každom štvorčeku 2×2 bolo každé z čísel 1, 2, 3, 4 práve raz. Po každom vyplnení si zapísal súčet všetkých čísel v tabuľke. Koľko najviac rôznych súčtov mohol takto získať?

Riešenie:

Súčet čísel v prvých 4 stĺpcoch je vždy $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$, zaujíma nás preto iba posledný stĺpec. V ňom nie je možné, aby boli dve rovnaké čísla vedľa seba. Súčet čísel v poslednom stĺpci bude preto aspoň $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ čiže 6 a najviac $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$ čiže 14. Dosiahnuť možno každý zo súčtov od 6 do 14: $(1, 2, 1, 2)$ dáva 6, $(1, 2, 1, 3)$ dáva 7, $(1, 3, 1, 3)$ dáva 8, $(1, 3, 1, 4)$ dáva 9, $(1, 4, 1, 4)$ dáva 10, $(2, 4, 1, 4)$ dáva 11, $(2, 4, 2, 4)$ dáva 12, $(2, 4, 3, 4)$ dáva 13, $(3, 4, 3, 4)$ dáva 14. Každé z uvedených vyplnení posledného stĺpca je možné doplniť do vyplnenia celej tabuľky. Existuje teda 9 rôznych súčtov.

D5 Označme m počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme n počet tých vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $n : m$.

Riešenie:

72-B-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4362#page=1).

5

N1 Nech ABC je trojuholník. Označme K, L, M postupne stredy jeho strán AB, BC, CA. Dokážte, že ťažnica KC rozpoľuje strednú priečku LM.

Riešenie:

Označme N stred strednej priečky ML. Keďže $|AC| = 2\,|MC|$, $|BC| = 2\,|LC|$ a $|AB| = 2\,|ML|$, pričom posledná rovnosť vyplýva z vlastností strednej priečky, trojuholník MLC je podobný trojuholníku ABC s koeficientom podobnosti 2. Opäť z vlastností strednej priečky je ML rovnobežná s AB, navyše platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LMC|$ a tiež $|\sphericalangle AKC| = |\sphericalangle MNC|$ (súhlasné uhly na rovnobežkách). Preto trojuholník MNC je podobný trojuholníku AKC s koeficientom podobnosti 2 podľa vety *usu*. Z toho už vyplýva, že $|AK| = 2\,|MN|$, čo sme mali dokázať.

N2 Nech $ABCD$ je rovnobežník. Označme S priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že rovnobežka so stranou AB prechádzajúca bodom S pretne stranu DA v jej strede.

Riešenie:

Uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú. Rovnobežka so stranou AB prechádzajúca bodom S obsahuje strednú priečku trojuholníka ABD, preto pretne stranu DA v jej strede.

N3 Nech $ABCD$ a $ABEF$ sú dva rovnobežníky s rovnakou základňou a rovnakou výškou ležiacou v rovnakej polrovine určenej priamkou AB. Nech S a R sú postupne priesečníky ich uhlopriečok. Dokážte, že RS je rovnobežná s AB.

Riešenie:

Trojuholníky ABR a ABS majú rovnakú výšku na základňu AB, a to polovičnú oproti výške rovnobežníkov. To vyplýva napr. z úlohy N2: Rovnobežka s AD prechádzajúca bodom S pretne úsečku AB v bode X, ktorý rozpoľuje AB. Teda trojuholníky ABD a XBS sú podobné v pomere $2 : 1$ a to je aj pomer ich výšok.

N4 Nech ABC je trojuholník, D je stred strany AB trojuholníka ABC a E bod jeho strany AC taký, že $|AE| = 2\,|CE|$. Označme F priesečník priamok BE a CD. Ukážte, že platí $|BE| = 4\,|EF|$.

Riešenie:

Označme M stred úsečky AE. Úsečka EF je strednou priečkou trojuholníka CMD a úsečka MD je strednou priečkou trojuholníka ABE. Odtiaľ už vyplýva dokazované tvrdenie.

D1 Nech $ABCD$ je štvoruholník a K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA. Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník.

Riešenie:

Úsečky KL a MN sú stredné priečky trojuholníkov ABC a CDA, sú preto zhodné a rovnobežné. Analogicky sú zhodné a rovnobežné úsečky LM a KN.

D2 Nech $ABCD$ je lichobežník. Stred jeho základne AB označme P. Nech K je bod úsečky AD a L, M, N postupne priesečníky úsečiek PD, PC, BC s rovnobežkou so základňou AB cez K.

a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určte polohu bodu K na úsečke AB tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$.

Riešenie:

60-C-I-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=368#page=7).

D3 Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD s dĺžkami 18, resp. 6. Nech E je bod strany AB taký, že $2\,|AE| = |EB|$. Nech body K, L, M, ktoré sú postupne ťažiskami trojuholníkov ADE, CDE, BCE, tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.

a) Dokážte, že priamky KM a CM zvierajú pravý uhol.

b) Vypočítajte dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$.

Riešenie:

60-C-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=389#page=2).

6

N1 Číslo 49 je rovné súčtu svojho ciferného súčinu a svojho ciferného súčtu: $49 = 4 \cdot 9 + (4 + 9)$. Koľko dvojciferných čísel má túto vlastnosť?

Riešenie:

Ľubovoľné dvojciferné číslo môžeme zapísať ako $10a + b$, pričom a je nenulová prvá cifra a b druhá. Platí teda $ab + a + b = 10a + b$, ekvivalentne $a(b - 9) = 0$, čiže $b - 9 = 0$, t. j. $b = 9$. Riešením je teda 9 čísel 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

N2 Nájdite všetky riešenia rovnice $11x = 7y$ v množine prirodzených čísel.

Riešenie:

Keďže 11 delí $7y$ a čísla 11 a 7 sú nesúdeliteľné, 11 delí y. Existuje teda prirodzené číslo k také, že $y = 11k$. Potom $11x = 7 \cdot 11k$, takže $x = 7k$. Vyhovujú teda práve dvojice $(7k, 11k)$, kde k je prirodzené číslo.

N3 Dvojciferné číslo s nenulovými ciframi nazveme *štvorcové* práve vtedy, keď pripočítaním čísla s obráteným poradím cifier dostaneme druhú mocninu prirodzeného čísla. Koľko štvorcových čísel existuje?

Riešenie:

Štvorcové číslo zapíšme v tvare $10a + b$, kde a a b sú cifry a $a \neq 0$. Číslo s vymenenými ciframi je $10b + a$, takže uvažovaný súčet je $(10a + b) + (10b + a)$ čiže $11(a + b)$. Keďže je to druhá mocnina prirodzeného čísla, platí $11 \mid a + b$. Keďže však $2 \leq a + b \leq 18$, platí $a + b = 11$. Preto $10a + b \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$, pričom každé z týchto čísel vyhovuje. Je ich teda 8.

D1 Nájdite najväčší 5-ciferný palindróm deliteľný číslom 101.

Riešenie:

52-B-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=267).

D2 Určte počet všetkých 5-ciferných palindrómov deliteľných číslom 37.

Riešenie:

53-A-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=254).

D3 Nájdite všetky štvorciferné čísla také, že v jeho zápise sú dve rôzne cifry, každá dvakrát, je deliteľné 7 a číslo, ktoré vznikne otočením poradia jeho cifier, je tiež štvorciferné a je deliteľné 7.

Riešenie:

58-C-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=30#page=3).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024