MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 Pre rôzne reálne čísla a a b majú výrazy $a^2 - b^2$ a $a - b$ rovnakú hodnotu. Ukážte, že hodnota $a + b$ je 1.

N2 Akú najmenšiu hodnotu môže pre reálne číslo a nadobúdať výraz $a^2 + 3a$?

N3 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $a^2 + b = c$, $b^2 + c = a$, $c^2 + a = b$.

D1 Pre nenulové reálne čísla a, b, c platí

$$a^2(b + c) = b^2(c + a) = c^2(a + b).$$

Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

D2 Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla také, že $x^3 + y^3 \leq 2$, tak $x + y \leq 2$.

D3 Nech a, b, c sú prirodzené čísla. U Dokážte, že všetky tri čísla $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$, $c^2 + a + b$ nemôžu byť zároveň druhé mocniny celých čísel.

---

2 V úlohách o ukladaní kociek predpokladáme, že na k sebe priliehajúcich stenách kociek sú vždy rovnaké čísla.

N1 Namiesto do štvorca ukladajme kocky do radu. Koľko najviac rôznych čísel sa môže vyskytnúť na horných stenách kociek?

N2 Kocky ukladáme do kvádra tvaru $n \times n \times 1$. Môže sa na dvoch susedných bočných stenách $n \times 1$ zloženého kvádra objaviť číslo 1?

D1 Z kociek sme poskladali kocku $3 \times 3 \times 3$. Určte možné hodnoty súčtov všetkých 54 viditeľných čísel za predpokladu, že každá kocka má na protiľahlých stenách čísla so súčtom 7.

D2 Štvorcová tabuľka 10×10 je vyplnená písmenami A, B, C, D tak, že každá podtabuľka 2×2 obsahuje každé z písmen práve raz. Dokážte, že existuje riadok alebo stĺpec, ktorý obsahuje práve 2 rôzne písmená.

D3 Určte najmenšie možné n také, že je možné do kocky $2020 \times 2020 \times 2020$ umiestniť n kvádrov $2020 \times 1 \times 1$ tak, aby každý kváder mal steny rovnobežné so stenami kocky, žiadne dva kvádre sa nepretínali (dotýkať sa môžu) a aby sa každá zo štyroch obdĺžnikových stien každého kvádra dotýkala buď inej obdĺžnikovej steny iného kvádra, alebo niektorej steny celej kocky.

3

N1 Nájdite všetky dvojice rôznych prirodzených čísel takých, že väčšie číslo je násobkom menšieho a ich súčet je 74.

N2 Akú najväčšiu dĺžku môže mať rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že každý jej člen okrem počiatočného je násobkom predchádzajúceho a posledný člen je 1000?

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

pričom $d(0) = d(1) = 0$, a ak $k > 1$, tak $d(k)$ je najväčší deliteľ k, ktorý je od neho menší.

D2 O nepárnom prvočísle p povieme, že je *špeciálne*, ak súčet všetkých prvočísel menších ako p je násobkom p. Existujú dve po sebe idúce prvočísla, ktoré sú špeciálne?

D3 Nájdite všetky celé čísla n také, že $n \geq 3$, a ak je $(d_1, \ldots, d_k)$ vzostupne zoradená postupnosť všetkých deliteľov čísla $n!$, tak platí $d_2 - d_1 \leq d_3 - d_2 \leq \ldots \leq d_k - d_{k-1}$.

D4 Určte všetky zložené čísla n také, že ak je $(d_1, \ldots, d_k)$ vzostupne zoradená postupnosť všetkých deliteľov čísla n, tak pre každé i z $\{1, \ldots, k-2\}$ je d_i deliteľom čísla $d_{i+1} + d_{i+2}$.

4

N1 Nech ABC je trojuholník a P je vnútorný bod jeho strednej priečky rovnobežnej so stranou BC. Nech Q a R sú priesečníky strany BC s rovnobežkami so stranami AB, resp. AC. Dokážte, že obsah trojuholníka PQR je rovný štvrtine obsahu trojuholníka ABC.

N2 Vypočítajte obsah trojuholníka so stranami dĺžok 5, 6, 7.

D1 Určte najväčší možný obsah prieniku trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ zo zadania úlohy.

D2 Nech a a d sú kladné čísla také, že platí $d \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Posunutím štvorca Q so stranou dĺžky a o ľubovoľný vektor dĺžky d vznikne štvorec Q'. Určte najmenší možný aj najväčší možný obsah prieniku štvorcov Q a Q'.

D3 Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a D päta jeho výšky z bodu C. Nech r, r_A, r_B sú postupne polomery kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC, ACD, BCD. Dokážte, že $r_A^2 + r_B^2 = r^2$.

D4 Nech r je polomer kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka v dĺžka jeho výšky na jeho preponu. Dokážte, že platí $0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5$.

D5 Nech $ABCD$ je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme k a l kružnice s priemermi BC a AD. Ďalej označme P priesečník priamok BC a AD. Dokážte, že dotyčnice z bodu P ku kružnici k zvierajú rovnaký uhol ako dotyčnice z bodu P ku kružnici l.

D6 Nech $\mathcal{T}$ je trojuholník T s obsahom 1. Dokážte, že existuje priamka p taká, že prienik trojuholníka $\mathcal{T}$ a jeho obrazu v osovej súmernosti podľa priamky p má obsah väčší ako $\frac{3}{4}$.

5

N1 Kam (a koľkými postupmi) sa Samo môže dostať, ak vo výťahu budú len tlačidlá 0, 1, 2?

N2 Dokážte, že ak výťah nemení smer (teda jazdí iba nahor), môže sa Samo na každé poschodie $n \geq 1$ dostať práve jedným postupom.

N3 Dokážte, že (kladný) rozdiel dvoch rôznych mocnín 2 možno vyjadriť ako súčet niekoľkých po sebe idúcich mocnín 2.

D1 Máme rovnoramenné váhy a 4 závažia, ktoré môžeme pokladať na misky váh.

a) Nájdite príklad sady 4 závaží, pomocou ktorej môžeme odmerať každú celočíselnú váhu od 1 po 15, ak môžeme klásť závažia len na ľavú misku váh.

b) Nájdite príklad sady 4 závaží, pomocou ktorej môžeme odmerať každú celočíselnú váhu od 1 po 40, ak môžeme klásť závažia na obe misky váh.

D2 Dokážte, že každé kladné prirodzené číslo je možné vyjadriť práve jedným spôsobom v tvare

$$c_1 \cdot 1! + \cdots + c_k \cdot k!,$$

kde $k \geq 1$ a pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí $0 \leq c_i \leq i$, pričom $c_k \neq 0$.

D3 Je dané celé číslo z menšie než -1. Dokážte, že akékoľvek nenulové celé číslo má vyjadrenie v tvare

$$c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_1 z^1 + c_0 z^0,$$

kde $k \geq 0$ a $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0$ sú celé čísla z množiny $\{0, 1, \dots, |z| - 1\}$. Ukážte tiež, že za podmienky $c_k \neq 0$ je takéto vyjadrenie jediné.

D4 Fibonacciho postupnosť Fib je definovaná vzťahmi $\mathrm{Fib}_0 = 0$, $\mathrm{Fib}_1 = 1$, a ak n je prirodzené číslo, tak $\mathrm{Fib}_{n+2} = \mathrm{Fib}_{n+1} + \mathrm{Fib}_n$. Dokážte, že každé kladné prirodzené číslo je možné vyjadriť ako súčet jedného alebo viacerých navzájom rôznych členov Fibonacciho postupnosti, z ktorých žiadne dva nie sú susedné. Ďalej dokážte, že bez použitia 0. a 1. člena je dokonca toto vyjadrenie jednoznačné.

D5 Blcha Blanka sedí v rovine s karteziánskou sústavou súradníc a začne skákať rovnobežne so súradnicovými osami tak, že ak n je kladné prirodzené číslo, tak v n. minúte skočí práve raz, a to v niektorom zo štyroch možných smerov s dĺžkou skoku Fib_n. Predpokladajme, že jej prvé dva skoky boli navzájom kolmé. Dokážte, že sa už nikdy nemôže vrátiť tam, odkiaľ začala skákať.

6

N1 Dokážte, že osi vnútorného a vonkajšieho uhla pri vrchole trojuholníka sú kolmé.

N2 Dokážte, že trojuholník tvorený strednými priečkami daného trojuholníka je mu podobný.

N3 Nech $ABCDEF$ je šesťuholník. Nech P je bod jeho vútra taký, že štvoruholníky $ABCP$, $CDEP$, $EFAP$ sú rovnobežníky. Dokážte, že trojuholníky ACE a DFB sú zhodné.

D1 Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a J stred kružnice pripísanej jeho strane BC. Dokážte, že úsečka JI je priemerom kružnice opísanej trojuholníku JBC.

D2 Nech ABC je trojuholník, H je priesečník jeho výšok, M stred strany BC a G obraz bodu H v stredovej súmernosti podľa bodu M. Dokážte, že úsečka AG je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

D3 Nech ABC je trojuholník, I stred do neho vpísanej kružnice a J, K, L postupne stredy kružníc pripísaných jeho stranám BC, CA, AB.

a) Dokážte, že I je súčasne priesečníkom výšok trojuholníka JKL.

b) Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC je súčasne Feuerbachovou kružnicou trojuholníka JKL.

c) Dokážte, že stredy oblúkov ABC, BCA, CAB sú súčasne stredmi strán trojuholníka JKL.

Poznámka:

Feuerbachova kružnica daného trojuholníka je kružnica prechádzajúca stredmi jeho strán a pätami jeho výšok. Pozri S. Horák: *Kružnice*, ŠMM zv. 16, str. 78–80 (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589).

D4 Nech ABC je trojuholník taký, že $|AB| < |AC|$. Označme M stred strany BC, N stred oblúka BAC kružnice jemu opísanej a I stred kružnice do neho vpísanej. Dokážte, že $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 Pre rôzne reálne čísla a a b majú výrazy $a^2 - b^2$ a $a - b$ rovnakú hodnotu. Ukážte, že hodnota $a + b$ je 1.

Riešenie:

Zo zadania $a^2 - b^2 = a - b$, t. j. $(a - b)(a + b) = a - b$, po vydelení nenulovým výrazom $a - b$ dostávame $a + b = 1$.

Situácia zo zadania pritom môže nastať, a to napríklad v prípade $(a, b) = (1, 0)$.

N2 Akú najmenšiu hodnotu môže pre reálne číslo a nadobúdať výraz $a^2 + 3a$?

Riešenie:

Platí

$$a^2 + 3a = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\tfrac{9}{4}.$$

Najmenšia hodnota je teda $-\frac{9}{4}$, ktorú výraz nadobúda v prípade $a = -\frac{3}{2}$.

N3 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $a^2 + b = c$, $b^2 + c = a$, $c^2 + a = b$.

Riešenie:

Po sčítaní rovníc dostaneme $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, teda $a = b = c = 0$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že $(0, 0, 0)$ je naozaj riešením pôvodnej sústavy.

D1 Pre nenulové reálne čísla a, b, c platí

$$a^2(b + c) = b^2(c + a) = c^2(a + b).$$

Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Riešenie:

73-B-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4914#page=5).

D2 Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla také, že $x^3 + y^3 \leq 2$, tak $x + y \leq 2$.

Riešenie:

57-B-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=216#page=3).

D3 Nech a, b, c sú prirodzené čísla. U Dokážte, že všetky tri čísla $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$, $c^2 + a + b$ nemôžu byť zároveň druhé mocniny celých čísel.

Riešenie:

APMO-2011-P1 (https://artofproblemsolving.com/community/c6h407219p2274367).

---

2 V úlohách o ukladaní kociek predpokladáme, že na k sebe priliehajúcich stenách kociek sú vždy rovnaké čísla.

N1 Namiesto do štvorca ukladajme kocky do radu. Koľko najviac rôznych čísel sa môže vyskytnúť na horných stenách kociek?

Riešenie:

V rade kociek sa na priliehajúcich stenách striedajú len 2 čísla, žiadne z nich preto nemôže byť na hornej stene. Ostatné 4 čísla na horných stenách môžu byť.

N2 Kocky ukladáme do kvádra tvaru $n \times n \times 1$. Môže sa na dvoch susedných bočných stenách $n \times 1$ zloženého kvádra objaviť číslo 1?

Riešenie:

V rade kociek sa na priliehajúcich stenách striedajú len 2 čísla, takže všetky kocky v rade, ktorý má číslo 1 na bočnej stene, budú mať číslo 1 iba na stenách rovnobežných. Takže nemôže.

D1 Z kociek sme poskladali kocku $3 \times 3 \times 3$. Určte možné hodnoty súčtov všetkých 54 viditeľných čísel za predpokladu, že každá kocka má na protiľahlých stenách čísla so súčtom 7.

Riešenie:

Keďže sú v každom rade 3 kocky za sebou, viditeľné čísla na jeho koncoch majú rovnako ako na jednej kocke súčet 7. Týchto dvojíc je 27, preto je odpoveď $27 \cdot 7$ čiže 189.

Dodajme, že kocka sa naozaj poskladať dá.

D2 Štvorcová tabuľka 10×10 je vyplnená písmenami A, B, C, D tak, že každá podtabuľka 2×2 obsahuje každé z písmen práve raz. Dokážte, že existuje riadok alebo stĺpec, ktorý obsahuje práve 2 rôzne písmená.

Riešenie:

Ak sú v niektorom riadku aspoň 3 rôzne písmená, tak v ňom 3 rôzne ležia vedľa seba, povedzme v poradí ABC. V riadku pod aj nad nimi musia byť tri písmená CDA. Zopakovaním tohto argumentu potom vyjde, že v uvedených troch stĺpcoch (a dokonca vo všetkých stĺpcoch) musia byť len dve rôzne písmená.

D3 Určte najmenšie možné n také, že je možné do kocky $2020 \times 2020 \times 2020$ umiestniť n kvádrov $2020 \times 1 \times 1$ tak, aby každý kváder mal steny rovnobežné so stenami kocky, žiadne dva kvádre sa nepretínali (dotýkať sa môžu) a aby sa každá zo štyroch obdĺžnikových stien každého kvádra dotýkala buď inej obdĺžnikovej steny iného kvádra, alebo niektorej steny celej kocky.

Riešenie:

USAMO-2020-P2 (https://artofproblemsolving.com/community/c5h2156978p15952773).

3

N1 Nájdite všetky dvojice rôznych prirodzených čísel takých, že väčšie číslo je násobkom menšieho a ich súčet je 74.

Riešenie:

Ak sú hľadané čísla a a ka, kde $k \geq 2$, tak $74 = a + ka = a(k+1)$, pričom $k + 1 \geq 3$, takže $k + 1$ je deliteľom čísla 74 väčším ako 3, teda je to 37 alebo 74. Potom $k \in \{36, 73\}$, takže $(a, ka) \in \{(2, 72), (1, 73)\}$. Obe dvojice zrejme vyhovujú.

N2 Akú najväčšiu dĺžku môže mať rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že každý jej člen okrem počiatočného je násobkom predchádzajúceho a posledný člen je 1000?

Riešenie:

Každý ďalší člen musí mať v rozklade na prvočinitele aspoň jedného prvočiniteľa navyše oproti predchádzajúcemu členu. Keďže $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$, číslo 1000 má 6 prvočiniteľov, členov môže byť až 7, (počiatočný člen totiž môže byť 1).

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

pričom $d(0) = d(1) = 0$, a ak $k > 1$, tak $d(k)$ je najväčší deliteľ k, ktorý je od neho menší.

Riešenie:

70-A-III-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3576#page=6).

D2 O nepárnom prvočísle p povieme, že je *špeciálne*, ak súčet všetkých prvočísel menších ako p je násobkom p. Existujú dve po sebe idúce prvočísla, ktoré sú špeciálne?

Riešenie:

73-A-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4884#page=3).

D3 Nájdite všetky celé čísla n také, že $n \geq 3$, a ak je $(d_1, \dots, d_k)$ vzostupne zoradená postupnosť všetkých deliteľov čísla $n!$, tak platí $d_2 - d_1 \leq d_3 - d_2 \leq \dots \leq d_k - d_{k-1}$.

Riešenie:

USAMO-2024-P1 (https://artofproblemsolving.com/community/c5h3281035p30216459).

D4 Určte všetky zložené čísla n také, že ak je $(d_1, \dots, d_k)$ vzostupne zoradená postupnosť všetkých deliteľov čísla n, tak pre každé i z $\{1, \dots, k-2\}$ je d_i deliteľom čísla $d_{i+1} + d_{i+2}$.

Riešenie:

IMO-2023-P1 (https://artofproblemsolving.com/community/c6h3106752p28097575).

4

N1 Nech ABC je trojuholník a P je vnútorný bod jeho strednej priečky rovnobežnej so stranou BC. Nech Q a R

sú priesečníky strany BC s rovnobežkami so stranami AB, resp. AC. Dokážte, že obsah trojuholníka PQR je rovný štvrtine obsahu trojuholníka ABC.

Riešenie:

Trojuholníky PQR a ABC majú rovnobežné strany, takže sú podobné. Výška na stranu QR má polovičnú dĺžku ako výška na stranu BC, takže koeficient podobnosti je $1/2$. Obsah trojuholníka PQR je preto rovný $(1/2)^2$ čiže $1/4$ obsahu trojuholníka ABC.

N2 Vypočítajte obsah trojuholníka so stranami dĺžok 5, 6, 7.

Riešenie 1:

Podľa Herónovho vzorca je tento obsah $6\sqrt{6}$.

Riešenie 2:

Ak je γ veľkosť uhla zvieraného stranami dĺžok 5 a 6, tak podľa kosínusovej vety $7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos\gamma$, z čoho $\cos\gamma = 1/5$, takže $\sin\gamma = \sqrt{1 - (\cos\gamma)^2} = 2\sqrt{6}/5$ a teda obsah trojuholníka je $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{6}/5$ čiže $6\sqrt{6}$.

D1 Určte najväčší možný obsah prieniku trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ zo zadania úlohy.

Riešenie:

Maximum nastane, ak bude vektor posunutia rovnobežný s niektorou zo strán trojuholníkov. Príslušný koeficient podobnosti potom bude $12/13$, $13/14$ alebo $14/15$, pričom maximum dáva práve posledný z nich. Vyjde $84 \cdot (14/15)^2$ čiže $5488/75$.

D2 Nech a a d sú kladné čísla také, že platí $d \le \frac{a}{\sqrt{2}}$. Posunutím štvorca Q so stranou dĺžky a o ľubovoľný vektor dĺžky d vznikne štvorec Q'. Určte najmenší možný aj najväčší možný obsah prieniku štvorcov Q a Q'.

Riešenie:

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že strany štvorcov sú vodorovné a zvislé. Prienikom štvorcov je obdĺžnik s obsahom $(a-|x|)(a-|y|)$, kde (x, y) je vektor posunutia. Nech $s = |x| + |y|$. Potom zrejme platí $s \ge d$ a tiež $s \le d\sqrt{2}$, pretože $x^2 + y^2 = d^2$ a $s^2 \le 2(x^2 + y^2)$. Použitím rovnosti

$$|xy| = \frac{1}{2}(|x| + |y|)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}d^2$$

dostávame

$$(a - |x|)(a - |y|) = a^2 - (|x| + |y|)a + |xy| = a^2 - sa + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}d^2$$
$$= \frac{1}{2}s^2 - as + a^2 - \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}\left(s^2 - 2as + a^2\right) + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(s - a)^2 + \frac{1}{2}(a - d)(a + d).$$

Kvadratický výraz na pravej strane má minimum v bode a, ktorý leží vďaka predpokladu $d \le \frac{a}{\sqrt{2}}$ napravo od intervalu $[d, d\sqrt{2}]$ obsahujúceho všetky možné hodnoty s. Zostáva využiť to, že na tomto intervale je hodnota tohto výrazu rastúca a že hodnoty d a $d\sqrt{2}$ sú dosiahnuteľné. Minimum je teda $a(a-d)$ a maximum je $(a - d/\sqrt{2})^2$.

D3 Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a D päta jeho výšky z bodu C. Nech r, r_A, r_B sú postupne polomery kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC, ACD, BCD. Dokážte, že $r_A^2 + r_B^2 = r^2$.

Riešenie:

Trojuholníky ABC, ACD a CBD sú navzájom podobné, takže existuje kladné reálne číslo k také, že $r = k \cdot |AB|$, $r_A = k \cdot |AC|$, $r_B = k \cdot |BC|$. Dokazovaná rovnosť je potom k^2-násobkom rovnosti z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC.

D4 Nech r je polomer kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka v dĺžka jeho výšky na jeho preponu. Dokážte, že platí $0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5$.

Riešenie:

S. Horák: *Nerovnosti v trojúhelníku*, ŠMM zv. 57, príklad 25, str. 50–52 (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404126).

D5 Nech $ABCD$ je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme k a l kružnice s priemermi BC a AD. Ďalej označme P priesečník priamok BC a AD. Dokážte, že dotyčnice z bodu P ku kružnici k zvierajú rovnaký uhol ako dotyčnice z bodu P ku kružnici l.

Riešenie:

71-A-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3916#page=1).

D6 Nech $\mathcal{T}$ je trojuholník T s obsahom 1. Dokážte, že existuje priamka p taká, že prienik trojuholníka $\mathcal{T}$ a jeho obrazu v osovej súmernosti podľa priamky p má obsah väčší ako $\frac{3}{4}$.

Riešenie:

Z trojuholníkovej nerovnosti možno odvodiť, že v každom trojuholníku existujú dve strany s dĺžkami a a b takými, že $1 \leq a/b < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Ak za p zvolíme os uhla medzi týmito stranami, vyjde prienik s obsahom aspoň $3-\sqrt{5}$, čo je cca 0,764, a teda viac ako $\frac{3}{4}$.

Poznámka:

Pozri tiež USAMO-1996-P3 (https://artofproblemsolving.com/community/c6h57378p353052).

Poznámka:

Komplikovanejším spôsobom je možné dokázať, že vhodnou voľbou priamky p je možné zaistiť prienik s obsahom dokonca aspoň $2\sqrt{2}-2$, čo je cca 0,828, túto konštantu navyše nemožno zlepšiť.

5

N1 Kam (a koľkými postupmi) sa Samo môže dostať, ak vo výťahu budú len tlačidlá 0, 1, 2?

Riešenie:

Ak prvýkrát stlačí tlačidlo 2, môže sa dostať na poschodia 2^2 čiže 4, 2^2-2^0 čiže 3, 2^2-2^1 čiže 2, $2^2-2^1+2^0$ čiže 3.

Inak sa môže dostať na poschodia 2^1 čiže 2, 2^1-2^0 čiže 1 a 2^0 čiže 1.

Celkovo sa na poschodie 4 môže dostať jedným postupom a na poschodia 1, 2 a 3 dvoma postupmi.

N2 Dokážte, že ak výťah nemení smer (teda jazdí iba nahor), môže sa Samo na každé poschodie $n \geq 1$ dostať práve jedným postupom.

Riešenie:

Máme dokázať, že každé kladné n je možné vyjadriť práve jedným spôsobom ako súčet rôznych celočíselných mocnín 2. Toto tvrdenie je známe ako jednoznačnosť zápisu v dvojkovej sústave. Načrtneme jeho dôkaz matematickou indukciou: Stačí dokázať, že pre každé kladné k má 2^{k+1} podmnožín množiny $\{2^0,\ldots,2^k\}$ navzájom rôzne súčty prvkov, a to čísla od 0 po $2^{k+1}-1$:

1. Ak $k=1$, tvrdenie platí.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $k-1$. Podmnožiny, ktoré neobsahujú prvok 2^k, majú podľa predpokladu súčty 0, …, 2^k-1. Podmnožiny, ktoré prvok 2^k obsahujú, majú súčty o 2^k väčšie, teda 2^k+0, …, 2^k+2^k-1. t. j. 2^k, …, $2^{k+1}-1$.

N3 Dokážte, že (kladný) rozdiel dvoch rôznych mocnín 2 možno vyjadriť ako súčet niekoľkých po sebe idúcich mocnín 2.

Riešenie:

Ak a a b sú prirodzené čísla také, že $a > b$. tak $2^a-2^b = 2^b+2^{b+1}+\cdots+2^{a-1}$, ako ľahko overíme pripočítaním 2^b k obom stranám a opakovaným využitím vzťahu $2^n+2^n=2^{n+1}$.

D1 Máme rovnoramenné váhy a 4 závažia, ktoré môžeme pokladať na misky váh.

a) Nájdite príklad sady 4 závaží, pomocou ktorej môžeme odmerať každú celočíselnú váhu od 1 po 15, ak môžeme klásť závažia len na ľavú misku váh.

b) Nájdite príklad sady 4 závaží, pomocou ktorej môžeme odmerať každú celočíselnú váhu od 1 po 40, ak môžeme klásť závažia na obe misky váh.

Riešenie:

a) Jedna takáto sada je $\{1,2,4,8\}$.

b) Jedna takáto sada je $\{1,3,9,27\}$.

D2 Dokážte, že každé kladné prirodzené číslo je možné vyjadriť práve jedným spôsobom v tvare

$$c_1 \cdot 1! + \cdots + c_k \cdot k!,$$

kde $k \geq 1$ a pre každé $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ platí $0 \leq c_i \leq i$, pričom $c_k \neq 0$.

Riešenie:

Ide o vyjadrenie čísla v tzv. faktoriálovej sústave
(pozri https://en.wikipedia.org/wiki/Factorial_number_system).

Najprv dokážeme pre každé kladné prirodzené m pomocnú rovnosť $1\cdot 1! + \cdots + m \cdot m! = (m+1)! - 1$ – stačí buď v $(2-1)\cdot 1! + (3-1)\cdot 2! + \cdots + ((m+1)-1)\cdot m!$ roznásobiť zátvorky a výsledok zjednodušiť, alebo použiť matematickú indukciu.

Tú využijeme aj na dôkaz tvrdenia zo zadania vlastnej úlohy D2:

1 Ak $n = 1$, tvrdenie platí.

2 Ak tvrdenie platí pre všetky kladné prirodzené čísla menšie ako n, kde $n > 1$, nájdeme k nemu najprv jednoznačne určené prirodzené čísla k a c, kde $c \le k$, také, že $c \cdot k! \le n < (c+1) \cdot k!$. Z pomocnej rovnosti v prípade $m = k$ vyplýva, že nájdené k je práve to, ktoré musí byť v každom vyjadrení n zo zadania D2 a že navyše v ňom musí platiť $c_k = c$;. Podľa indukčného predpokladu pre $n - c \cdot k!$ potom dostávame aj jednoznačne určené koeficienty c_i s indexmi $i < k$, lebo $n - c \cdot k! < k!$. (Niekoľko posledných z týchto koeficientov môžu byť nuly, v prípade $n - c \cdot k! = 0$ to sú dokonca samé nuly).

D3 Je dané celé číslo z menšie než -1. Dokážte, že akékoľvek nenulové celé číslo má vyjadrenie v tvare

$$c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_1 z^1 + c_0 z^0,$$

kde $k \ge 0$ a $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ sú celé čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, |z| - 1\}$. Ukážte tiež, že za podmienky $c_k \ne 0$ je takéto vyjadrenie jediné.

Riešenie:

Ak vyjadrované číslo označíme n, tak čísla $c_0, c_1, \ldots$ je možné postupne určiť kongruenciami

$$c_0 = n! \bmod |z|,$$

$$c_1 = \frac{n - c_0}{z}! \bmod |z|,$$

$$c_2 = \frac{n - c_0 - c_1 z}{z^2}! \bmod |z|$$

a tak ďalej.

Poznámka:

V prípade $z = -2$ ide o vyjadrenie čísla v „mínusdvojkovej" sústave. Pozičné sústavy so zápornými základmi našli praktické uplatnenie aj z dôvodu, že aj záporné čísla sú v nich zapisované bez znamienka, napríklad $-7 = (1001)_{-2}$.

D4 Fibonacciho postupnosť Fib je definovaná vzťahmi $\mathrm{Fib}_0 = 0$, $\mathrm{Fib}_1 = 1$, a ak n je prirodzené číslo, tak $\mathrm{Fib}_{n+2} = \mathrm{Fib}_{n+1} + \mathrm{Fib}_n$. Dokážte, že každé kladné prirodzené číslo je možné vyjadriť ako súčet jedného alebo viacerých navzájom rôznych členov Fibonacciho postupnosti, z ktorých žiadne dva nie sú susedné. Ďalej dokážte, že bez použitia 0. a 1. člena je dokonca toto vyjadrenie jednoznačné.

Riešenie:

Zeckendorfova veta (https://en.wikipedia.org/wiki/Zeckendorf%27s_theorem).

D5 Blcha Blanka sedí v rovine s karteziánskou sústavou súradníc a začne skákať rovnobežne so súradnicovými osami tak, že ak n je kladné prirodzené číslo, tak v n. minúte skočí práve raz, a to v niektorom zo štyroch možných smerov s dĺžkou skoku Fib_n. Predpokladajme, že jej prvé dva skoky boli navzájom kolmé. Dokážte, že sa už nikdy nemôže vrátiť tam, odkiaľ začala skákať.

Riešenie:

ICMC-6.1-P3 (https://artofproblemsolving.com/community/c7h2968728p26597510).

6

N1 Dokážte, že osi vnútorného a vonkajšieho uhla pri vrchole trojuholníka sú kolmé.

Riešenie:

Súčet veľkostí vnútorného a vonkajšieho uhla pri jednom vrchole trojuholníka je 180°. Súčet ich polovíc je preto 90°.

N2 Dokážte, že trojuholník tvorený strednými priečkami daného trojuholníka je mu podobný.

Riešenie 1:

Keďže stredná priečka trojuholníka je rovnobežná so základňou a má oproti nej polovičnú dĺžku, je podľa vety *sss* „priečkový" trojuholník podobný celému trojuholníku s koeficientom podobnosti 1/2.

Riešenie 2:

Z vlastnosti ťažníc vyplýva, že priečkový trojuholník je obrazom pôvodného trojuholníka v rovnoľahlosti s koeficientom $-1/2$.

N3 Nech $ABCDEF$ je šesťuholník. Nech P je bod jeho vútra taký, že štvoruholníky $ABCP$, $CDEP$, $EFAP$ sú rovnobežníky. Dokážte, že trojuholníky ACE a DFB sú zhodné.

Riešenie:

Keďže sú štvoruholníky $ABCP$ a $CDEP$ rovnobežníky, sú úsečky AB, CP, DE rovnobežné a zhodné. Preto je aj štvoruholník $ABDE$ rovnobežník, teda úsečky AE a DB sú zhodné. Analogicky sú zhodné aj úsečky CE s FB a úsečky AC s DF, čo spolu podľa vety *sss* už znamená zhodnosť trojuholníkov ACE a DFB.

D1 Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a J stred kružnice pripísanej jeho strane BC. Dokážte, že úsečka JI je priemerom kružnice opísanej trojuholníku JBC.

Riešenie:

Podľa N1 platí $|\sphericalangle IBJ| = 90° = |\sphericalangle ICJ|$.

D2 Nech ABC je trojuholník, H je priesečník jeho výšok, M stred strany BC a G obraz bodu H v stredovej súmernosti podľa bodu M. Dokážte, že úsečka AG je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Riešenie:

Priamka BG je obrazom priamky CH v stredovej súmernosti podľa bodu M, preto sú tieto priamky rovnobežné. Keďže priamka CH je kolmá na stranu AB, je uhol ABG pravý. Analogicky je pravý aj uhol ACG, teda body B a C ležia na kružnici nad priemerom AG.

D3 Nech ABC je trojuholník, I stred do neho vpísanej kružnice a J, K, L postupne stredy kružníc pripísaných jeho stranám BC, CA, AB.

a) Dokážte, že I je súčasne priesečníkom výšok trojuholníka JKL.

b) Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC je súčasne Feuerbachovou kružnicou trojuholníka JKL.

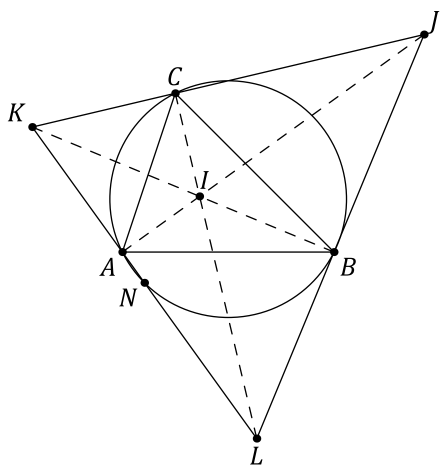
c) Dokážte, že stredy oblúkov ABC, BCA, CAB sú súčasne stredmi strán trojuholníka JKL.

Riešenie:

a) Napr. priamky KL a IJ sú navzájom kolmé podľa úlohy N1, pretože sú to osi vonkajšieho a vnútorného uhla pri vrchole A.

b) Podľa časti a) sú body A, B, C pätami výšok v trojuholníku JKL.

c) Stred N úsečky KL je podľa Tálesovej vety stredom kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $BCKL$, takže platí $|NB| = |NC|$ a $|\sphericalangle BNC| = 2 \cdot |\sphericalangle BKC| = 2 \cdot |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle BAC|$, pričom predposledná rovnosť platí vďaka tomu, že štvoruholník $AICK$ je tetivový (opäť Tálesova veta). Bod N je preto naozaj stredom oblúka BAC.



Poznámka:

Feuerbachova kružnica daného trojuholníka je kružnica prechádzajúca stredmi jeho strán a pätami jeho výšok. Pozri S. Horák: *Kružnice*, ŠMM zv. 16, str. 78–80 (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589).

D4 Nech ABC je trojuholník taký, že $|AB| < |AC|$. Označme M stred strany BC, N stred oblúka BAC kružnice jemu opísanej a I stred kružnice do neho vpísanej. Dokážte, že $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$.

Riešenie:

Označme K a L stredy kružníc pripísaných postupne stranám AC a AB. Štvoruholník $BCKL$ je tetivový (Tálesova veta), takže trojuholníky BIC a LIK sú podľa veta *uu* podobné. Podľa úlohy D3 je bod N stredom úsečky KL. Úsečky IM a IN sú preto zodpovedajúce si ťažnice v podobných trojuholníkoch BIC a LIK, teda podobné sú aj ich „polovice" – trojuholníky IMB a INL. Odtiaľ už $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INL| = |\sphericalangle INA|$.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024