65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
Riešenie úloh krajského kola
kategória E

1) Vlakové súpravy

Riešenie:

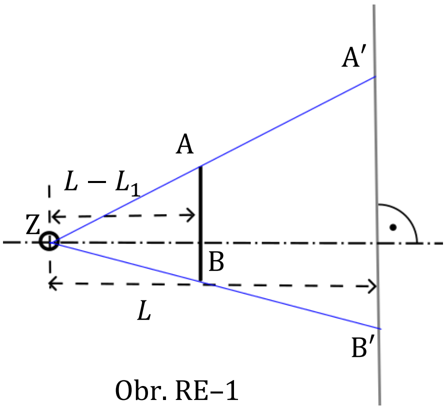
a) Dĺžka vozňa súpravy A je
$L_A = \frac{L}{n_A} = 22{,}0 \text{ m}$,
dĺžka vozňa súpravy B je
$L_B = \frac{L}{n_B} = 20{,}0 \text{ m}$.
V okamihu, keď čelá rušňov sú zarovno, začiatok 7-ho vozňa súpravy A je od čela vo vzdialenosti
$x_A = 6\ L_A = 132{,}0 \text{m}$,
začiatok čela 6-ho vozňa súpravy B je od čela vo vzdialenosti
$x_B = 5\ L_B = 100{,}0 \text{ m}$.
Súprava A je rýchlejšia a pohybuje sa voči súprave B rýchlosťou $\Delta v = v_A - v_B$. Podľa zadania
$\Delta v = \frac{x_A - x_B}{t_1} = \frac{32 \text{ m}}{6{,}4 \text{ s}} = 5{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}0 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Dĺžku L súpravy s touto relatívnou rýchlosťou súprava A prejde za čas
$t = \frac{L}{\Delta v} = \frac{220 \text{ m}}{5{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 44{,}0 \text{ s}$.
Za tento čas t rušeň A prejde vzdialenosť s, teda má rýchlosť
$v_A = \frac{s}{t} = \frac{1760 \text{ m}}{44{,}0 \text{ s}} = 40{,}0 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 144 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 3 body
Rýchlosť súpravy B je o Δv menšia, teda
$v_B = v_A - \Delta v = 35{,}0 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 126 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 3 body

b) K predbehnutiu rušeň A musela prejsť vzdialenosť 2 L relatívnou rýchlosťou Δv, teda
$t_2 = \frac{2L}{\Delta v} = \frac{440 \text{ m}}{5{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 88 \text{ s} = 1 \text{ min } 28 \text{ s}$. 2 body
Za uvedený čas súprava B prejde vzdialenosť
$s_2 = v_B t_2 = \left(35{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(88 \text{ s}) = 3\,080 \text{ m}$. 2 body

2) Tieň

Riešenie:

a) Zoberme rovinu, v ktorej leží os o a je kolmá na hornú a dolnú hranu predmetu (dĺžky b). Označme okraje predmetu v tejto rovine A a B a ich obrazy A′ a B′. Z náčrtku je jasné, že trojuholníky ΔZAB a ΔZA′B′ sú si podobné, pričom $|\mathrm{AB}| = a$ a $|\mathrm{A'B'}| = a_1'$ Výška torjuholníka ΔZAB je $L - L_1$, výška trojuholníka ΔZA′B′ je L. Preto platí



Obr. RE–1

$k_{a1} = \frac{a_1'}{a} = \frac{L}{L-L_1} = \frac{30{,}0\ \mathrm{cm}}{16{,}0\ \mathrm{cm}} = 1{,}875.$ 1 bod

Analogicky je pre pomer strán b a b'

$k_{b1} = \frac{b_1'}{b} = \frac{L}{L-L_1} = \frac{30{,}0\ \mathrm{cm}}{16{,}0\ \mathrm{cm}} = 1{,}875.$ 1 bod

b) Lúče, ktoré vychádzajú z ohniska spojnej šošovky pokračujú po prechode šošovkou rovnobežne s optickou osou šošovky (os o), preto lúče premietajú predmet kolmo na stenu, a tieň má rovnaké rozmery ako predmet P, teda

$k_{a2} = k_{b_2} = 1.$ 3 body

c) Zobrazíme zdroj Z rozptylkou Š$_2$. Súradnica zdroja je $x = 8{,}0$ cm a súradnicu obrazu Z' označíme x', potom podľa zobrazovacej rovnice

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$, teda v jednotkách cm $\frac{1}{8} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{-8}$,

teda

$x' = -4$ cm,

čo znamená, že obraz Z' sa nachádza $|x'| = 4$ cm pred rozptylkou (medzi zdrojom Z a rozptylkou Š$_2$). 1 bod

Znova máme podobné trojuholníky, len v tomto prípade

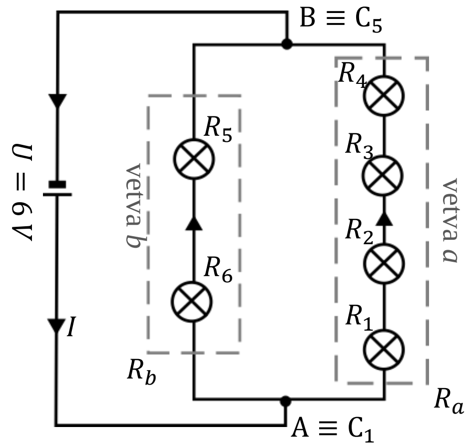
$k_{a3} = \frac{a_3'}{a} = \frac{L-|x'|}{L-|x'|-L_1} = \frac{26{,}0\ \mathrm{cm}}{12{,}0\ \mathrm{cm}} = 1{,}875.$ 2 body

$k_{b3} = \frac{b_3'}{b} = \frac{L-|x'|}{L-|x'|-L_1} = \frac{26{,}0\ \mathrm{cm}}{12{,}0\ \mathrm{cm}} = 1{,}875.$ 2 body

3) Žiarovky

Riešenie:

a) Do obrázku sme prekreslili prípad, keď svorku A pripojíme k uzlu C_1 a svorku B k uzlu C_5. Prúd, ktorý tečie zdrojom, sa rozdelí do dvoch vetiev označené ako vetva a a vetva b. Odpor vetiev označme R_a a R_b. Odpor R sústavy žiaroviek medzi uzlami A a B je potom daný vzťahom
$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}.$
Výkon sústavy žiaroviek je rovný výkonu P zdroja
$P = UI,$
kde I je prúd, ktorý tečie zdrojom, a veľkosť prúdu je daná
$I = \frac{U}{R}.$



Obr. RE–2

Výkon zdroja je potom
$P = U^2 \frac{1}{R} = U^2 \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}\right).$
Hľadáme také pripojenie, pre ktoré je minimálny súčet
$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c - R_a},$
kde $R_c = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 21\ \Omega$ je odpor všetkých žiaroviek v sérii.
Dá sa vytušiť (a s pár pokusmi výpočtov sa o tom presvedčiť), že súčet $\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c - R_a}\right)$ bude najmenší, ak $R_a = R_c - R_a$, teda
$R_a = \frac{1}{2} R_c = 10{,}5\ \Omega.$
Odpory žiaroviek sú celočíselné, preto presná rovnosť nenastane, ale najbližšie k tomu je prípad, keď $R_a = 10\ \Omega$ a $R_b = 11\ \Omega$.
Tento postup nie je úplne rigorózny, ale odporúčame ho uznať, lebo hovorí o korektnom uvažovaní súťažiaceho.
Iná možnosť je napr. spočítať všetky odlišné prípady. Výsledky $\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c - R_a}\right)$ v jednotkách Ω^{-1} uvádzame v tabuľke nižšie. Za úplné riešenie tejto časti celkom 6 bodov

Čiastočné argumenty navrhujeme uznať za 5 bodov, pokiaľ udáva správne riešenie a pokiaľ argumentoval podstatné časti riešenia. Odporúčame byť benevolentným pri takýchto spôsoboch riešenia, lebo spôsobov existuje veľa. Dôležité je, aby úvahy nemohli viesť k špatným výsledkom.

Pokiaľ súťažiaci počíta všetky prípady, úplný a správny výpočet je spomínaných 6 bodov. Ak nevypočíta všetky nerovnocenné prípady, potom 4 body. Je ľahko pochopiteľné, že vďaka symetrii stačí počítať prípady, ktoré sú uvedené v tabuľke nižšie (symetria voči zámene svoriek A a B).

		Pripojenie svorky B				
pripojenie svorky A	1/R	C2	C3	C4	C5	C6
	C1	1,050	0,389	0,233	0,191	0,233
	C2		0,553	0,263	0,194	0,214
	C3			0,389	0,214	0,194
	C4				0,309	0,194
	C5					0,263

b) Výkon zdroja sa rovná celkovému výkonu všetkých žiaroviek spolu.

$P = U^2 \frac{1}{R} = (6\ \mathrm{V})^2 \left(\frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{11\ \Omega}\right) = 6{,}87\ \mathrm{W}.$ 4 body

4) Cisternová loď

Riešenie:

a) Ponor olejom naplnenej lode je h a tiaž lode je vyrovnaná vztlakovou silou vody

$(m_0 + m_{\mathrm{ol}})g = abh\rho_{\mathrm{v}}g,$

odkiaľ

$h = \frac{m_0 + m_{\mathrm{ol}}}{ab\rho_{\mathrm{v}}} = \frac{9{,}500\ \mathrm{Gg}}{(25{,}0\ \mathrm{m})(80{,}0\ \mathrm{m})(1000\ \mathrm{kg/m^3})} = 4{,}75\ \mathrm{m}.$ 2 body

b) $p_B = p_{\mathrm{a}} + \rho_{\mathrm{v}}hg - \rho_{\mathrm{ol}}cg = 103{,}5\ \mathrm{kPa}\,.$ 3 body

c) Výsledná sila F je daná z pôsobenia dvoch síl: pretlak z dvoch protichodných tlakov na plochu $S_{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{p}}b_{\mathrm{p}}$ poklopu. Zdola pôsobí tlak oleja, zhora atmosférický tlak a pretlak, ktorým olej pôsobí na poklop je

$\Delta p = p_B - p_{\mathrm{a}} = \rho_{\mathrm{v}}hg - \rho_{\mathrm{ol}}cg = 2500\ \mathrm{Pa}.$ 1 bod

Veľkosť výslednice sily pôsobí smerom hore 1 bod

$F = \Delta p S_{\mathrm{p}} = \Delta p a_{\mathrm{p}} b_{\mathrm{p}} = (2500\ \mathrm{Pa})(0{,}70\ \mathrm{m})(0{,}80\ \mathrm{m}) = 1400\ \mathrm{N}.$ 1 bod

d) Podľa uvedeného zákona olej vyteká rýchlosťou

$v = \sqrt{2p/\rho_{\mathrm{ol}}} = 2{,}36\ \mathrm{m/s}.$

Uvažujme kvapku oleja s hmotnosťou $m = 1{,}0\ \mathrm{g}$, ktorá má rýchlosť v smerom hore (proti intenzite gravitačného poľa). Do akej výšky H kvapka vyletí? Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že

$mgH = \frac{1}{2}mv^2.$ 1 bod

Po dosadení za kvadrát rýchlosti a zjednodušení

$H = \frac{p}{g\rho_{\mathrm{ol}}} = \frac{2500\ \mathrm{Pa}}{(10\ \mathrm{N/kg})(900\ \mathrm{kg}/m^3)} = 0{,}28\ \mathrm{m} = 28\ \mathrm{cm}.$ 1 bod

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy okresného kola kat. E
Autori úloh: Boris Lacsný 2,3, Aba Teleki 1,4
Recenzia úloh: Ivo Čáp,
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024