

65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
krajské kolo kategórie D
Riešenie úloh

1. Preteky na okruhu

Riešenie:

- a) Bežci bežia v opačných smeroch rovnaký čas a spoločne prebehnú jeden okruh

$$v_1 t_1 + v_2 t_1 = s .$$

V druhom prípade prebehne za rovnaký čas prvý bežec dráhu o dĺžku okruhu väčšiu

$$v_1 t_2 - v_2 t_2 = s .$$

Z oboch rovníc určíme rýchlosti bežcov

$$v_1 = \frac{t_1 + t_2}{2 t_1 t_2} s \approx 5,5 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{t_2 - t_1}{2 t_1 t_2} s \approx 4,7 \text{ m/s}.$$

- b) Za čas t_2 prebehol prvý bežec dráhu

$$\ell = v_1 t_2 = \frac{t_1 + t_2}{2 t_1} s ,$$

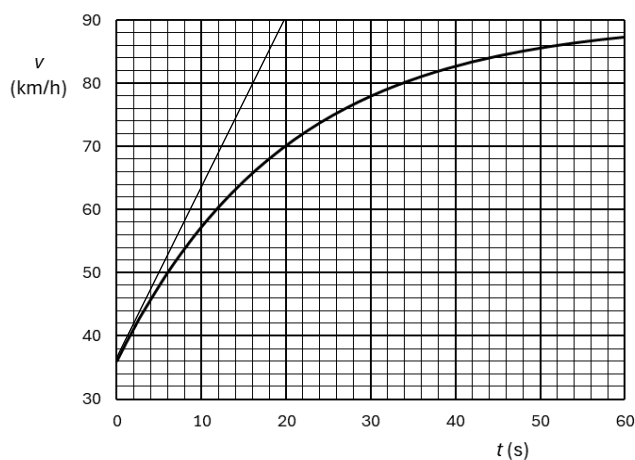
čo predstavuje počet kôl

$$N = \frac{\ell}{s} = \frac{t_1 + t_2}{2 t_1} \approx 7,17 \approx 7 \text{ kôl a } 68 \text{ m}.$$

2. Pohyb automobilu

Riešenie:

- a) Zrýchlenie získame ako smernicu dotýčnice grafu rýchlosti



Obr. RD2-1

V grafe vynesieme dotyčnicu ku grafu v čase $t = 0$ a odčítame pre čo najväčší rozdiel rýchlosti $\Delta v = (90 - 36) \text{ km/h} = (90 - 36)/3,6 \text{ m/s}$ rozdiel času $\Delta t = 20 \text{ s}$, obr. RD2-1

Začiatkové zrýchlenie je

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{20 \text{ s}} \frac{(90 - 36)}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pozn.: Z grafu vidíme, že zrýchlenie postupne klesá a automobil prechádza do rovnomerného pohybu.

- b) Motorická sila prekonáva na začiatku odporovú silu $F_0 + k v_1^2$ a zotrvačnú silu $F_z = m a_1$. Výkon je potom

$$P_1 = F_1 v_1 = (F_0 + k v_1^2 + m a_1) v_1$$

$$k = \left(\frac{P_2}{v_2} - \frac{P_1}{v_1} + m a_1 \right) \frac{1}{v_2^2 - v_1^2} \quad (1)$$

PO dosiahnutí maximálnej rýchlosti v_2 je pohyb rovnomerný a výkon motora je

$$P_2 = (F_0 + k v_2^2) v_2 \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) vyjadríme požadované veličiny

$$k = \left(\frac{P_2}{v_2} + m a_1 - \frac{P_1}{v_1} \right) \frac{1}{v_2^2 - v_1^2} \approx 1,52 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2.$$

a

$$F_0 = \frac{P_2}{v_2} - k v_2^2 = \frac{P_2}{v_2} - \left(m a_1 + \frac{P_2}{v_2} - \frac{P_1}{v_1} \right) \frac{v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 448 \text{ N}.$$

- c) Výkon pri rýchlosti v_3

$$P_3 = (F_0 + k v_3^2) v_3 \approx 71,4 \text{ kW}.$$

- d) Spotreba je priamoúmerná práci motorickej sily $W = F_m \ell$

$$s_2 = K (F_0 + k v_2^2) \ell$$

$$s_3 = K (F_0 + k v_3^2) \ell.$$

Z oboch výrazov dostávame

$$s_3 = \frac{F_0 + k v_3^2}{F_0 + k v_2^2} s_2 \approx 8,56 \text{ l/100 km}.$$

3. Závažia na kladke

Riešenie:

a) Stredná hodnota doby pádu

$$t_p = \frac{\sum_{n=1}^5 t_{pn}}{5} = 2,644 \text{ s.}$$

b) V prvej časti pohybu s krúžkom ide o rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením a , pre ktoré platí

$$(2M + m)a = mg, \text{ a teda } a = \frac{m}{2M + m} g$$

Rozdiel tiažovej sily $F_g = mg$ pôsobí na sústavu s hmotnosťou $2M + m$.

Dráhu $\frac{1}{2}H$ prejde závažie za čas t_1

$$\frac{1}{2}H = \frac{1}{2}at_1^2, \text{ odkiaľ } t_1 = \sqrt{\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{H}{g} \frac{2M + m}{m}},$$

a získa rýchlosť

$$v_1 = at_1 = g \frac{m}{2M + m} \sqrt{\frac{H}{g} \frac{2M + m}{m}} = \sqrt{gH \frac{m}{2M + m}}.$$

V druhej časti po zachytení krúžku sa závažie pohybuje rovnomerným pohybom rýchlosťou v_1 .

Čas pohybu na zvyšnej dráhe $\frac{1}{2}H$ je

$$t_2 = \frac{H}{2v_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g} \frac{2M + m}{m}} = \frac{1}{2}t_1.$$

Celkový čas pádu

$$t_p = t_1 + t_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{H}{g} \frac{2M + m}{m}},$$

odkiaľ máme

$$g = \frac{9}{4} \frac{H}{t_p^2} \frac{2M + m}{m} \approx 9,85 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

4. Gule vo vode

Riešenie:

- a) Objem hliníkovej gule

$$V_{\text{Al}} = \frac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}} \approx 74 \text{ cm}^3.$$

- b) Pri ponorení sklenenej gule do polovice jej objemu na sústavu pôsobí tiažová sila a vztlaková sila

$$(m_{\text{Al}} + m_s + \rho_v V_1)g = \rho_v \left(V_{\text{Al}} + \frac{1}{2} V_g \right) g$$

Odtiaľ dostávame

$$m_s = \rho_v \left(\frac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}} + \frac{1}{2} V_g - V_1 \right) - m_{\text{Al}} \approx 74 \text{ g}.$$

- c) Na hliníkovú guľu pôsobí tiažová sila, vztlaková sila a ťahová sila vlákna

$$m_{\text{Al}} g = V_{\text{Al}} \rho_v g + F_v,$$

odkiaľ máme

$$F_v = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_{\text{Al}}} \right) m_{\text{Al}} g \approx 1,23 \text{ N}.$$

- d) Pri dolievaní vody sklenená guľa klesá, až kým nedosiahne otvor hladinu. Potom už začne voda natekať z nádoby a sústava klesne pod hladinu až kým sa hliníková guľa nedotkne dna. Keď otvor klesne k hladine vody v nádobe (celá sklenená guľa je ponorená), pre rovnováhu tiažovej a vztlakovej sily platí rovnica

$$\left[m_{\text{Al}} + m_s + (V_1 + V_2) \rho_v \right] g = (V_{\text{Al}} + V_g) \rho_v g,$$

odkiaľ dostávame po dosadení za m_s a úprave

$$V_2 = \frac{1}{2} V_g = 260 \text{ cm}^3.$$

Pozn.: Tento bod sa dá riešiť aj jednoduchou argumentáciou. Môžeme doliať ešte toľko vody, koľko bude schopná guľa ponorená do polovice ešte vytlačiť, teda polovicu vonkajšieho objemu gule.