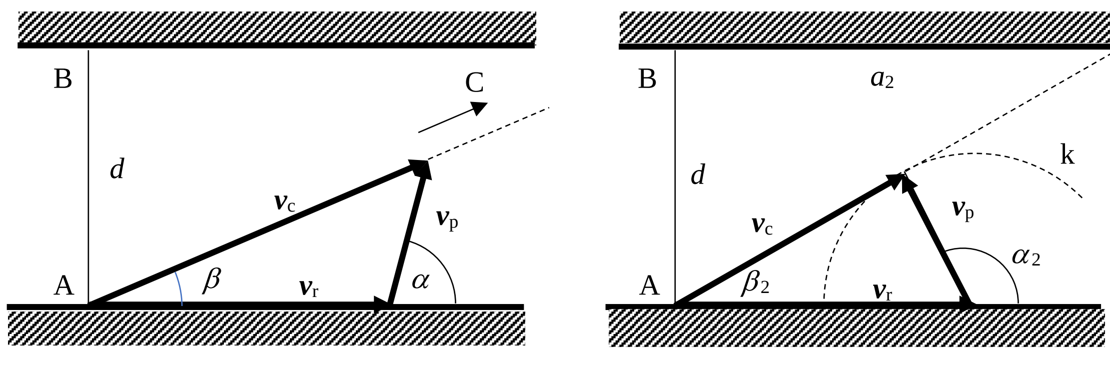
65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
krajské kolo kategórie C
Riešenie úloh

1. Plavec

Riešenie:
Rýchlosť $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ plavca voči brehu dostávame zložením rýchlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ plavca voči vode a rýchlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ toku vody voči brehu. Výsledný vektor $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ rýchlosti plavca vzhľadom na breh zviera s brehom uhol β, obr. RB–1 (a).



Obr. RC2–1

Rýchlosť plavca vzhľadom na vodu rozdelíme na zložku rovnobežnú s tokom a kolmú na breh

$$v_{\mathrm{p}\perp} = v_\mathrm{p} \sin\alpha \quad \text{a} \quad v_{\mathrm{p}\parallel} = v_\mathrm{p} \cos\alpha \,.$$

Celková rýchlosť plavby vzhľadom na breh

$$v_\mathrm{c} = \sqrt{\left(v_\mathrm{p}\sin\alpha\right)^2 + \left(v_\mathrm{r} - v_\mathrm{p}\cos\alpha\right)^2}$$

Čas plavby cez rieku

$$t = \frac{d}{v_\mathrm{p}\sin\alpha}$$

a) Najkratší čas zodpovedá uhlu α = 90°, tzn. sinα = 1

$$t_1 = \frac{d}{v_\mathrm{p}} \approx 33\ \mathrm{s}.$$

Za tento čas voda plavca odnesie do vzdialenosti v smere toku

$$a_1 = v_\mathrm{r}\, t_1 = \frac{v_\mathrm{r}}{v_\mathrm{p}} d \approx 100\ \mathrm{m}.$$

Pre uhol β_1 platí

$$\tan\beta_1 = \frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{r}}, \text{ odkiaľ máme } \beta_1 = \arctan\left(\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{r}}\right) \approx 27°.$$

b) Body ABC tvoria pravouhlý trojuholník. Strana BC bude najkratšia, ak prepona AC bude najkratšia. Dráha plavca (dĺžka prepony BC)

$$\ell = \frac{d}{\tan\beta}$$

je najkratšia, ak je uhol, ktorý zviera trajektória plavca s brehom čo najväčší.

Pre rôzne hodnoty uhlu α koniec vektora $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$, a teda aj koniec vektora $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$, sa pohybuje po kružnici k, obr. RC2–1 (b). Najväčšia hodnota uhlu β vektoru $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ v smere dotyčnice ku kružnici k. Dostávame tak pravouhlý trojuholník, v ktorom platí

$$\sin\beta_2 = \frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{r}}, \text{ odkiaľ máme } \beta_2 = \arcsin\left(\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{r}}\right) = \arcsin\frac{1}{2} \approx 30°.$$

Určíme uhol $\alpha_2 > 90°$

$$\alpha_2 = 90° + \beta_2 \approx 120°.$$

Pre uhol β_2 dostávame

$$a_2 = \frac{d}{\tan\beta_2} = d\,\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta_2}}{\sin\beta_2} = d\,\frac{\sqrt{v_\mathrm{r}^2 - v_\mathrm{p}^2}}{v_\mathrm{p}} = \frac{d}{\tan 30°} \approx 87\ \mathrm{m}.$$

Doba plavby

$$t_2 = \frac{d}{v_\mathrm{p}\sin\alpha_2} = \frac{d}{v_\mathrm{p}\cos\beta_2} = \frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{v_\mathrm{r}^2 - v_\mathrm{p}^2}}\,\frac{d}{v_\mathrm{p}} = \frac{t_1}{\cos 30°} \approx 38\ \mathrm{s}.$$

2. Telesá spojené pružinou

Riešenie:

a) Po udelení rýchlosti hranolu (2) sa začne pružina predlžovať a na hranol (2) pôsobí pružina brzdiacou silou $k\,x$, kde x je predĺženie pružiny. Na pohybujúci sa hranol H2 pôsobí i sila trenia. Práca sily trenia je rovná poklesu mechanickej energie sústavy

$$\frac{1}{2}m_2 v_0^2 - \left(\frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}k\,x^2\right) = f\,m_2\,g\,x\,, \qquad (1)$$

odkiaľ máme

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m_2}x^2 - 2f\,g\,x}\,. \qquad (2)$$

b) Pri medznej rýchlosti $v_{0\mathrm{m}}$ hranol (2) sa nepohne, ak ťahová sila pružiny neprekročí v okamihu zastavenia hranola (2) maximálnu silu trenia, ktorá pôsobí na hranol H1

$$k\,d \le f\,m_1\,g\,,$$

kde d je najväčšie predĺženie pružiny. V okamihu zastavenia hranola H2, $v = 0$, a posunutie $x = d$, kde $k\,d = f\,m_1\,g$ dostaneme z (1)

$$\frac{1}{2}m_2 v_{0\mathrm{m}}^2 - \frac{1}{2}k\,d^2 = f\,m_2\,g\,d\,.$$

Po dosadení a úprave

$$v_{0\mathrm{m}} = \sqrt{2\,f\,g\,d + \frac{k\,d^2}{m_2}} = \sqrt{2\frac{m_1\left(f\,g\right)^2}{k} + \frac{m_1^2\left(f\,g\right)^2}{m_2\,k}} = f\,g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(2+\frac{m_1}{m_2}\right)} \approx 0{,}36\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

c) Maximálne je predĺženie pri zastavení hranola H2 bez toho, aby sa pohol hranol H1.

Z (2) dostávame pre $v = 0$ a $v_0 = p\,v_{0\mathrm{m}}$

$$d^2 + 2\frac{f\,m_2\,g}{k}d - \frac{m_2 v_0^2}{k} = 0,$$

odkiaľ

$$d = -\frac{f\,m_2\,g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{f\,m_2\,g}{k}\right)^2 + \frac{m_2 v_0^2}{k}}$$ (zmysel má znamienko +).

Po dosadení $v_0 = p\,v_{0\mathrm{m}}$ dostávame po úprave

$$d = \frac{f\,m_2\,g}{k}\left[\sqrt{1+p^2\frac{m_1}{m_2}\left(2+\frac{m_1}{m_2}\right)}-1\right] \approx 3{,}1\ \mathrm{cm}.$$

3. Mechanická sústava

Riešenie:

a) Keď sa závažie pohybuje nadol, ťahová sila pružiny vyrovnáva silu trenia telesa (1) a zložku tiažovej sily rovnobežnú s naklonenou rovinou s spôsobuje predĺženie pružiny

$$F_{\mathrm{p1}} = k\left(\ell_1 - \ell_0\right) = f\,m_1\,g\cos\alpha + m_1\,g\sin\alpha,$$

odkiaľ máme

$$\ell_0 = \ell_1 - \frac{m_1\,g\,\cos\alpha}{k}\left(f + \tan\alpha\right).$$

Pre dané hodnoty $\ell_0 \approx 22{,}3$ mm.

b) Na závažie Z pôsobí okrem vonkajšej sily F tiažová sila závažia a ťahová sila vlákna, ktorá vyrovnáva zložku tiažovej sily a trenia na oba hranoly

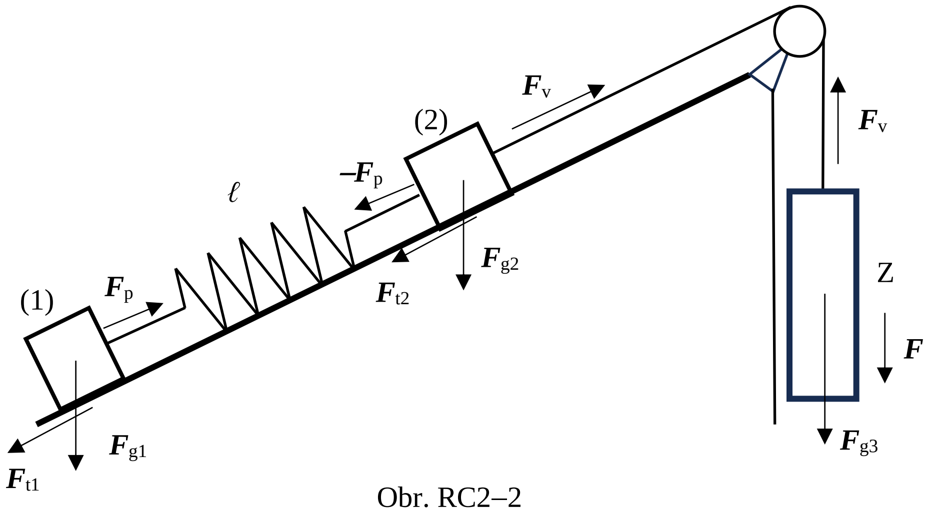
$$F + m_3\,g = \left(m_1+m_2\right)g\,\sin\alpha + f\left(m_1+m_2\right)g\,\cos\alpha,$$

odkiaľ

$$F = \left[\left(m_1+m_2\right)\cos\alpha\left(\tan\alpha + f\right) - m_3\right]g.$$

Pre hmotnosť závažia $m_3 = 30{,}0$ g dostávame $F \approx 76{,}5$ mN, pre hmotnosť $m_3 = 40{,}0$ g máme $F \approx -21{,}6$ mN. Z výsledku je zrejmé, že v prvom prípade musíme závažie ťahať nadol, v druhom prípade treba závažie nadľahčovať.

Pôsobenie síl na jednotlivé telesá sústavy znázorňuje obr. RC2–2.



Obr. RC2–2

c) Ak dvíhame závažie smerom nahor, zmení sa smer síl trenia pôsobiacich na hranoly na opačný. Ak sa hranoly pohybujú nadol a vlákno je napnuté, je ťahová sila vlákna

$$F_v = (m_1 + m_2) g \sin\alpha - f (m_1 + m_2) g \cos\alpha = \\ = (m_1 + m_2) g \cos\alpha (\tan\alpha - f). \qquad (1)$$

Aj je vlákno napnuté a brzdí pohyb hranolov, musí byť $F_v > 0$.
Z rovnice (1) dostávame podmienku $\tan\alpha > f$.

Na dolný hranol pôsobia sily tiaže, trenia a pružiny, ktoré sú v rovnováhe pri rovnomernom pohybe. Ťahová sila pružiny

$$F_{p2} = k(\ell_2 - \ell_0) = m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha = m_1 g \cos\alpha (\tan\alpha - f)$$

a dĺžka pružiny

$$\ell_2 = \ell_0 + \frac{m_1 g \cos\alpha}{k}(\tan\alpha - f) = \ell_1 - \frac{2 f m_1 g \cos\alpha}{k}. \qquad (2)$$

Ak je $\tan\alpha \le f$, hranoly sa na naklonenej rovine nebudú pohybovať.
Ťahová sila vlákna pri dvíhaní závažia je nulová $F_v = 0$
a dĺžka pružiny zostáva nezmenená $\ell_2 = \ell_1$.

Pre dané hodnoty je splnená prvá podmienka $\tan\alpha \approx 0{,}58 > f = 0{,}15$ a po dosadení do (1) a (2) dostávame $F_v \approx 218$ mN a $\ell_2 \approx 26{,}8$ mm, tzn. pružina sa skráti oproti prípadu, keď sme ťahali závažie dole (je ale stále predĺžená oproti nenapnutému stavu).

d) Predpokladajme, že závažie po uvoľnení a ustálení dĺžky pružiny klesá a všetky tri telesá sa pohybujú s rovnakým zrýchlením a.

Pohybová rovnica závažia je

$$m_3 a = m_3 g - F_v .$$

Na dvojicu hranolov pôsobia sily ťahu vlákna, zložky tiažových síl na hranoly a sily trenia

$$(m_1 + m_2) a = F_v - (m_1 + m_2) g \sin\alpha - (m_1 + m_2) g f \cos\alpha .$$

Po vylúčení ťahu vlákna a úprave dostávame

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)a=m_3\,g\;-\left(m_1+m_2\right)g\cos\alpha\left(\tan\alpha+\;f\right)>0\,,$$

odkiaľ máme podmienku $m_3\;>\left(m_1+m_2\right)\cos\alpha\left(\tan\alpha+\;f\right)=m_{31}$.

Predpokladajme, že závažie po uvoľnení a ustálení dĺžky pružiny stúpa. Hranoly na naklonenej rovine sa pohybujú nadol a závažie stúpa s rovnakým zrýchlením so zrýchlením a.
Pohybová rovnica závažia je

$$F_\mathrm{v}-F-m_3\,g=0$$

a sústavy hranolov

$$\left(m_1+m_2\right)a=-F_\mathrm{v}+\left(m_1+m_2\right)g\sin\alpha-\left(m_1+m_2\right)g\;f\cos\alpha\,.$$

Po vylúčení ťahovej sily vlákna a úprave máme

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)a=-m_3\,g+\left(m_1+m_2\right)g\cos\alpha\left(\tan\alpha-f\right)>0\,,$$

odkiaľ máme podmienku $m_3\;<\left(m_1+m_2\right)\cos\alpha\left(\tan\alpha-f\right)=m_{32}$.

Ak je $m_{32}\le m_3\le m_{31}$, sústava telies zostáva v pokoji.

Pre dané hodnoty máme $m_{31}\approx 37{,}8$ g a $m_{32}\approx 22{,}2$ g.
Pre m_3 = 30,0 g zostáva závažie v pokoji,
pre m_3 = 40,0 g sa bude závažie pohybovať smerom nadol.

4. Drôtený *n*-uholník

Riešenie:

a) Merný dĺžkový odpor

$$\rho=\frac{1}{\ell}\frac{U}{I}\approx 5{,}0\ \Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}.$$

b) Ak pripojíme zdroj k vrcholom 1 a 2, sú k zdroju pripojené paralelne úseky s odporom R a $(n-1)\,R$, kde $R=\rho\dfrac{\ell}{n}=\dfrac{1}{n}\dfrac{U}{I}$ je odpor jednej strany n–uholníka. Prúd zdroja je

$$I_{12}=\frac{U}{R_{12}}=U\,\frac{n\,R}{R\left(n-1\right)R}\,.$$

Po pripojení zdroja k vrcholom 1 a 3 sú k zdroju pripojené dve paralelné vetvy s odpormi $2R$ a $(n-2)R$. Prúd zdroja je

$$I_{13}=\frac{U}{R_{13}}=U\,\frac{n\,R}{2R\left(n-2\right)R}\,.$$

Pomer prúdov

$$k=\frac{I_{12}}{I_{13}}=\frac{2\,R\left(n-2\right)R}{R\left(n-1\right)R}=2\,\frac{n-2}{n-1}\,,$$

odkiaľ máme

$n=\dfrac{4-k}{2-k}$. Pre dané k = 1,8 dostávame n = 11.

c) Prúd po pripojení zdroja k susedným vrcholom

$$I_{12} = \frac{U}{R}\,\frac{n}{n-1} = \frac{(4-k)^2}{2(2-k)}\, I \approx 14{,}5\ \text{A}.$$

d) Ak pripojíme zdroj medzi vrcholy 1 a m, je prúd zdroja

$$I_{1m} = \frac{U}{R_{1m}} = U\,\frac{nR}{(m-1)R\,(n-m+1)R} = n\,\frac{U}{R}\,\frac{1}{(m-1)(n-m+1)}\,.$$

Súčin v menovateli zapíšeme v tvare $p\,(n-p)$

$$p(n-p) = -\left[p^2 - n\,p + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(p-\frac{n}{2}\right)^2.$$

Druhý člen je vzťah pre kvadratickú parabolu s maximom pre $p = \frac{n}{2}$.

Keďže p je celé číslo, ak je n párne, ide o najodľahlejšie vrcholy. Ak je n nepárne, je maximálna hodnota pre $p = m-1 = \frac{n-1}{2}$.

V našom prípade je $p = 5$, a teda ide o pripojenie medzi vrcholy 1 a 6, prípadne rovnako pre vrcholy 1 a 7 (medzi vrcholmi musí byť 5 strán jedným alebo druhým smerom, správne je aj 2–7, 2–8 a pod.). V každom takom prípade je prúd

$$I_{16} = I\,\frac{n^2}{p(n-p)} \approx 4{,}8\ \text{A}.$$

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy krajského kola kat. C
Návrh a úprava úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024