65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
krajské kolo kategórie B
Riešenie úloh

1. Hranol na doske

Riešenie:

a) Na spriahnutú sústavu hranol–závažie (S) pôsobí v smere pohybu tiažová sila závažia a proti smeru pohybu sila trenia hranola na povrchu dosky. Výpočtom maximálnych trecích síl zistíme, že hranol kĺže po doske a doska kĺže po stole ($f_1\, m_1 < m_2$, t.j. 0,0375 < 0,05, a tiež $f_2\,(M + m_1) < f_1\, m_1$, t.j. 0,0325 < 0,0375).

Počas pohybu hranola po povrchu dosky pre pohyb sústavy S platí pohybová rovnica

$$\left(m_1+m_2\right)a_1=-m_1\,g\,f_1+m_2\,g\text{, odkiaľ } a_1=\frac{m_2-m_1\,f_1}{m_1+m_2}\,g\approx 61{,}3\ \text{cm·s}^{-2},$$

kde a_1 je zrýchlenie hranola voči stolu.

Na dosku pôsobí v smere pohybu sila trenia s hranolom, a proti smeru pohybu sila trenia medzi doskou zaťaženou hranolom a stolom. Pre zrýchlenie a_2 dosky voči stolu dostávame

$$M\,a_2=m_1\,g\,f_1-\left(M+m_1\right)g\,f_2\text{, odkiaľ } a_2=\frac{m_1\,f_1-\left(M+m_1\right)f_2}{M}\,g\approx 9{,}8\ \text{cm·s}^{-2}$$

Hranol má voči povrchu dosky zrýchlenie

$$a_{12}=a_1-a_2=\left[\frac{m_2-m_1\,f_1}{m_1+m_2}-\frac{m_1\,f_1-\left(M+m_1\right)f_2}{M}\right]g\approx 51{,}5\ \text{cm·s}^{-2}.$$

S týmto zrýchlením hranol prejde na povrchu dosky dráhu

$$L=\frac{1}{2}a_{12}\,t_1^2\ .$$

Čas pohybu hranola po doske

$$t_1=\sqrt{\frac{2L}{a_{12}}}=\sqrt{\frac{2L}{g}}\sqrt{\frac{M\left(m_1+m_2\right)}{m_2M-\left(m_1+m_2+M\right)m_1 f_1+\left(M+m_1\right)\left(m_1+m_2\right)f_2}}\approx 1{,}76\ \text{s}.$$

Hranol sa pohybuje so zrýchlením a_1 vzhľadom na stôl a za čas t_1 získa rýchlosť $v_1 = a_1\, t_1$

$$v_1=\sqrt{2Lg}\,\frac{m_2-m_1\,f_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{M\left(m_1+m_2\right)}{m_2M-\left(m_1+m_2+M\right)m_1 f_1+\left(M+m_1\right)\left(m_1+m_2\right)f_2}}\approx 1{,}08\ \text{ms}^{-1}.$$

b) Doska sa pohybuje po dobu t_1 so zrýchlením a_2 a za tento čas prejde dráhu

$$d_1=\frac{1}{2}a_2\,t_1^2=L\,\frac{\left[m_1\,f_1-\left(M+m_1\right)f_2\right]\left(m_1+m_2\right)}{m_2M-\left(m_1+m_2+M\right)m_1 f_1+\left(M+m_1\right)\left(m_1+m_2\right)f_2}\approx 15{,}2\ \text{cm}$$

a získa rýchlosť

$$v_2=a_2\,t_1\approx 17{,}3\ \text{m·s}^{-1}.$$

Keď hranol z dosky spadne, doska sa pohybuje pod účinkom sily trenia so zrýchlením

$$a_3=-g\,f_2\approx -49\ \text{cm·s}^{-2}.$$

Doska prejde rovnomerne spomaleným pohybom dráhu

$$d_2=-\frac{v_2^2}{2a_3}=\frac{1}{2}\frac{a_2^2}{g\,f_2}\,t_1^2$$

a po dosadení

$$d_2 = L\,\frac{1}{2\,f_2 M}\;\frac{\left(m_1+m_2\right)\left[m_1\,f_1-\left(M+m_1\right)f_2\right]^2}{m_2 M-\left(m_1+m_2+M\right)m_1 f_1+\left(M+m_1\right)\left(m_1+m_2\right)f_2}\approx 3{,}0\ \text{cm}.$$

Celkové posunutie dosky

$$d = d_1 + d_2 \approx 18{,}2\ \text{cm}.$$

2. Telesá na pružine

Riešenie:

a) Impulzom získa sústava rovnako hybnosť, ktorá sa počas pohybu zachováva a určuje rýchlosť posúvania sústavy ako celku (rýchlosť hmotného stredu). Okrem toho na seba telesa vzájomne pôsobia prostredníctvom pružiny. V sústave spojenej s hmotným stredom dvojica telies kmitá. Výsledný pohyb je tak daný superpozíciou rovnomerného pohybu hmotného stredu a kmitavého pohybu voči hmotnému stredu.

b) Na začiatku má pružina nezaťaženú dĺžku a na telesá pôsobí nulovou silou. Začiatočným impulzom sa uvedie do pohybu iba teleso (1), ktoré získa hybnosť $p_{01} = m_1 v_0$. Táto hybnosť sa zachováva, a preto rýchlosť pohybu hmotného stredu sústavy

$$v_{\mathrm{T}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,v_0\,.$$

V sústave spojenej s hmotným stredom má začiatočnú rýchlosť $v_{1\mathrm{T}0} = v_0 - v_{\mathrm{T}}$, a teda hybnosť

$$p_{1\mathrm{T}0} = m_1\left(v_0 - v_{\mathrm{T}}\right).$$

Keďže vzhľadom na hmotný stred je hybnosť sústavy nulová, je hybnosť telesa (2) v sústave hmotného stredu rovnako veľká opačného smeru. Keďže začiatočná rýchlosť telesa (2) je nulová, v sústave hmotného stredu je to $v_{2\mathrm{T}0} = -\,v_{\mathrm{T}}$.

$$p_{2\mathrm{T}0} = -\,p_{1\mathrm{T}0} = -m_1\left(v_0 - v_{\mathrm{T}}\right) = m_2\left(v_{2\mathrm{T}0}\right).$$

Pohyb telies viazaných pružinou je kmitavý pohyb. Po pol perióde má teleso (2) rýchlosť rovnako veľkú a opačného smeru. Dostávame tak výslednú maximálnu rýchlosť telesa

$$v_{\mathrm{m}} = v_{\mathrm{T}} - v_{2\mathrm{T}0} = v_{\mathrm{T}} - v_{2\mathrm{T}0} = 2\,v_{\mathrm{T}} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\,v_0 \approx 68{,}6\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}.$$

c) Pohybové rovnice telies v sústave hmotného stredu

$$m_1\,a_1 = -k\left(x_1 - x_2\right) \qquad m_2\,a_2 = -k\left(x_2 - x_1\right).$$

Zrýchlenie vzájomného pohybu

$$a_2 - a_1 = -\frac{k}{m_1}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{k}{m_2}\left(x_2 - x_1\right) = -k\,\frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}\left(x_2 - x_1\right),\ \text{resp.}\ \Delta a = -\frac{k\left(m_1\,m_2\right)}{m_1\,m_2}\Delta x\,,$$

čo je rovnica harmonických kmitov s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{k\left(m_1+m_2\right)}{m_1\,m_2}} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Najväčšie priblíženie nastane za štvrťperiódu

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1\,m_2}{k\left(m_1+m_2\right)}} \approx 0{,}325\ \text{s}.$$

3. Tepelný dej

Riešenie:

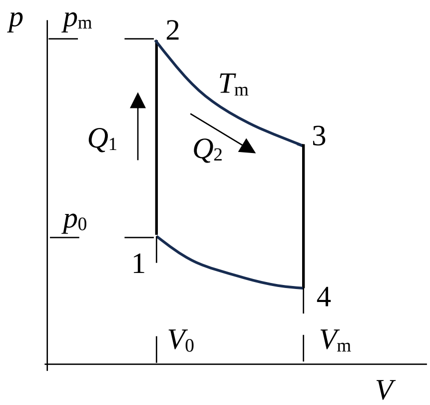
a) Látkové množstvo hélia vo valci

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \left(p_a + \frac{F_0}{S} \right) \frac{V_0}{R T_0} \approx 0{,}30 \text{ mol.}$$

Tepelná kapacita pri konštantnom objeme

$$C_V = \frac{s}{2} n R = \frac{s}{2} \left(p_a + \frac{F_0}{S} \right) \frac{V_0}{T_0} \approx 3{,}75 \text{ J·K}^{-1}.$$

b) Teplo Q_1 dodané plynu pri izochorickom deji 1–2 plyn zohrieva na maximálnu teplotu T_m a tlak dosiahne maximálnu hodnotu p_m. Pri teplote T_m sa ďalším dodaným teplom pri zmene stavu 2–3 zvyšuje objem plynu na maximálnu hodnotu V_m. Potom sa plyn pri konštantnom objeme ochladí (dej 3–4) na začiatočnú teplotu T_0 a následne izotermicky (dej 4–1) stlačí na začiatočný objem V_0, obr. RB2–1.



Obr. RB2–1

Pri izochorickom deji sa nekoná práca, a teda dodané teplo je rovné zmene vnútornej energie

$$Q_1 = \Delta U_1 = C_V \left(T_m - T_0 \right).$$

Výsledná teplota

$$T_m = T_0 + \frac{Q_1}{C_V} = T_0 \left[1 + \frac{2 S Q_1}{s \left(p_a S + F_0 \right) V_0} \right] \approx 567 \text{ K.}$$

Maximálny tlak

$$p_m = p_0 \frac{T_m}{T_0} = \left(p_a + \frac{F_0}{S} \right) \left[1 + \frac{2 S Q_1}{s \left(p_a S + F_0 \right) V_0} \right] \approx 283 \text{ kPa.}$$

Pri izotermickom deji sa nemení vnútorná energia a dodané teplo je rovné vykonanej práci

$$Q_2 = W_2 = \int_{V_0}^{V_m} p \, dV = \int_{V_0}^{V_m} \frac{n R T_m}{V} dV = n R T_m \ln \left(\frac{V_m}{V_0} \right), \qquad (1)$$

odkiaľ máme

$$V_m = V_0 \exp \left(\frac{Q_2}{n R T_m} \right) = V_0 \exp \left[\frac{Q_2}{\left(p_a + \frac{F_0}{S} \right) V_0 + \frac{2 Q_1}{s}} \right] \approx 7{,}1 \text{ dm}^{-3}.$$

c) Účinnosť cyklického termodynamického deja

$$\eta = \frac{W}{Q},$$

kde W je celková práca vykonaná plynom počas cyklu a Q celkové dodané teplo.
Celkové dodané teplo $Q = Q_1 + Q_2$.
Celková práca

$$W = W_2 + W_4 = nRT_\mathrm{m} \ln\left(\frac{V_\mathrm{m}}{V_0}\right) + nRT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_\mathrm{m}}\right) = \left(T_\mathrm{m} - T_0\right) nR \ln\left(\frac{V_\mathrm{m}}{V_0}\right).$$

Účinnosť

$$\eta = \frac{T_\mathrm{m} - T_0}{Q_1 + Q_2} nR \ln\left(\frac{V_\mathrm{m}}{V_0}\right) = \left(1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\right) \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1}{Q_1 + \frac{s}{2}\left(p_\mathrm{a} + \frac{F_0}{S}\right)V_0} \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}.$$

Pre dané hodnoty $\eta \approx 15{,}7\ \%$.

Pozn.: *Iná možnosť určenia účinnosti*.

Keďže $Q_2 = W_2$ a rovnako $Q_4 = W_4$, môžeme celkovú prácu vyjadriť $W = Q_2 + Q_4$. Teplo pri izotermickom deji je priamoúmerné teplote T a závisí od pomeru objemov na začiatku a na konci deja, pozri (1). Keďže deje 2–3 a 4–1 majú rovnaké krajné objemy, platí $Q_4 / Q_2 = -\,T_0 / T_\mathrm{m}$, a teda

$$W = Q_2 + Q_4 = Q_2\left(1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\right)$$

Potom

$$\eta = \frac{Q_2 + Q_4}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}\left(1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{m}}\right) \approx 15{,}7\ \%.$$

4. Pavúčik

Riešenie:

a) Pre geometrické pomery platí zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{H - h_1} + \frac{1}{h_1} = \frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu pre h_1

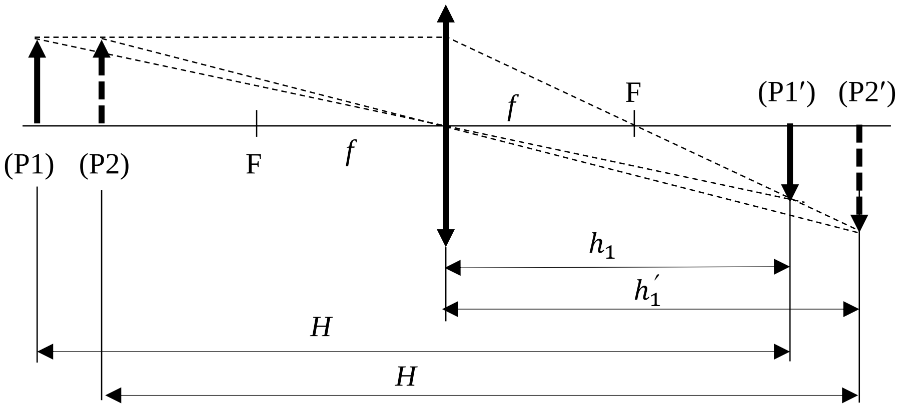
$$h_1^2 - H h_1 + H f = 0, \qquad (2)$$

ktorá má riešenie

$$h_1 = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} - H f} = \frac{H}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{f}{H}}\right). \qquad (3)$$

Vidíme, že podmienka vzniku reálneho obrazu je $H \geq 4f$. Pri splnení tejto podmienky existujú dve polohy šošovky, resp. jedna pre minimálnu hodnotu $H_\mathrm{min} = 4f$.

Situáciu znázorňuje obr. RB2–2.
(Pre lepšiu názornosť je situácia znázornená v zobrazovacej sústave spojenej s šošovkou. V reálnej situácii je stabilná projekčná plocha a posúva sa šošovka)



Obr. RB2–2

Pre H_1 = 60 cm existujú dve riešenia $h_{11} \approx 43{,}4$ cm a $h_{12} \approx 16{,}6$ cm.
Pre H_2 = 40 cm < $4f$ reálny obraz na projekčnej ploche nevznikne.

b) Pre určenie rýchlosti sú rôzne možnosti. Jednou z nich je časová derivácia rovnice (2)

$$2h_1\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}-\left(h_1\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+H\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}\right)+f\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0\text{, kde } v_0=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\text{ (pokles) a }\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=v_1 .$$

Po dosadení dostaneme

$$v_1=\frac{h_1-f}{H-2h_1}v_0=-\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{1-\frac{2f}{H}}{\sqrt{1-4\frac{f}{H}}}\right)v_0 .$$

Pre výšku h_{11} (znamienko +) dostávame $v_{11} \approx -23{,}4\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$,
pre výšku h_{12} (znamienko –) máme $v_{12} \approx 3{,}42\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$.
Z výsledku vidno, že v prvom prípade treba posúvať šošovku nadol ($v_{11} < 0$),
v druhom prípade naopak smerom nahor ($v_{12} > 0$)

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy krajského kola kat. B
Návrh a úprava úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024