65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
kategória D
riešenie úloh domáceho kola

1. Plť a čln

Riešenie:

a) Označme u rýchlosť prúdu vody , a tým aj rýchlosť plte. Vzdialenosť prístavov, a teda dĺžka trasy plavby

$$L = u\,t_1 \ . \qquad (1)$$

Rýchlosť člna na pokojnej hladine označíme v. Proti prúdu rieky sa čln pohybuje rýchlosťou $v - u$ (vzhľadom na breh) a po prúde rýchlosťou $v + u$. Časy plavby sú tak

$$t_{21} = \frac{L}{v-u} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{L}{v-u} + \frac{L}{v+u} \ . \qquad (2)$$

Dosadíme (1) do (2) a po úprave dostaneme sústavu rovníc

$$v\,t_{21} = u\left(t_1 + t_{21}\right) \qquad (3)$$

$$\left(t_2 - t_{21}\right)v = \left(t_1 - t_2 + t_{21}\right)u \ . \qquad (4)$$

Z pomeru oboch rovníc dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu pre čas t_2

$$t_{21}^2 + \left(t_1 - t_2\right)t_{21} - \frac{1}{2}t_1\,t_2 = 0 \ .$$

Riešenie je

$$t_{21} = -\frac{t_1 - t_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(t_1 - t_2\right)^2 + 2t_1\,t_2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1 + t_2\right] \approx 20 \text{ min.}$$ 6 b

b) Rýchlosť v vyjadríme napr. zo vzťahu (3) s použitím (1) a predchádzajúceho výsledku

$$v = \frac{L}{t_1}\left(\frac{t_1}{t_{21}} + 1\right) = L\left(\frac{2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1 + t_2} + \frac{1}{t_1}\right) \approx 12{,}8 \text{ km/h.}$$ 4 b

2. Autobus

Riešenie:

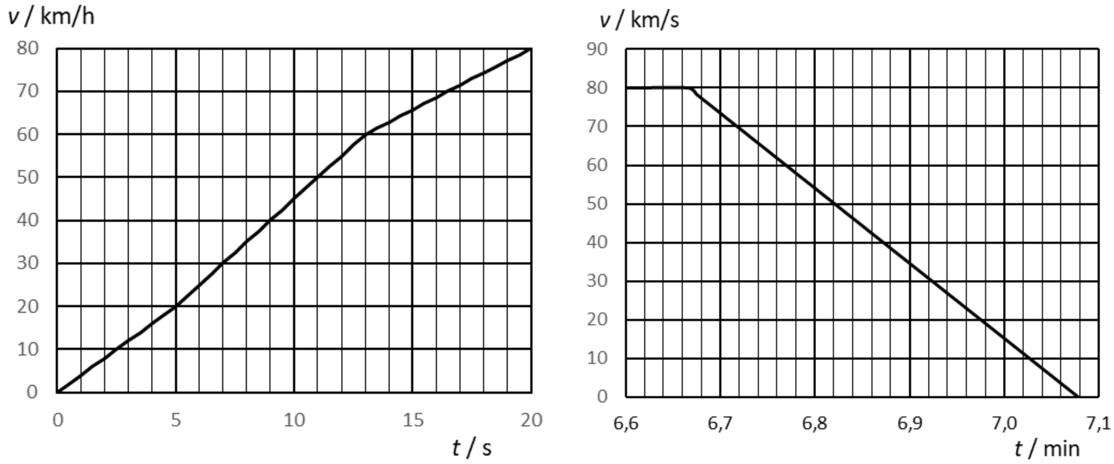
a) Z druhého grafu určíme celkovú dráhu autobusu $s \approx 8{,}6$ km a celkový čas $t \approx 7{,}08$ min.
Priemerná rýchlosť na celej trati

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} \approx 72{,}9 \text{ km/h}. \qquad 2 \text{ b}$$

b) Okamžitú rýchlosť na každom intervale určíme z podielu prírastku dráhy Δs a časového intervalu Δt (čím menší interval Δt zvolíme, tým presnejšiu hodnotu dostaneme)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Postupne získame rýchlosti pre jednotlivé časy. Výsledky znázorňujú grafy na obr. RD–1.



Obr. RD–1

3 b

c) Z prvého grafu vidíme, že ide o úseky rovnomerne zrýchleného pohybu (rýchlosť narastá lineárne). Po preraďovaní rýchlostného stupňa sú zrýchlenia rôzne v intervaloch (0 – 5) s, (5 – 13) s a (13 – 20) s. Po dosiahnutí cestovnej rýchlosti $v_3 = 80$ km/h je pohyb rovnomerný až do času 6,67 min, čo je 280 m pred zastávkou. V poslednej časti je pohyb rovnomerne spomalený.

2 b

Zrýchlenia v jednotlivých úsekoch dostaneme ako podiel zmeny rýchlosti Δv a príslušného času Δt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad 1 \text{ b}$$

Pre jednotlivé intervaly rovnomerne zrýchleného pohybu dostávame zrýchlenie

$a_1 \approx 1{,}11 \text{ m·s}^{-2}$, $a_2 \approx 1{,}39 \text{ m·s}^{-2}$, $a_3 \approx 0{,}79 \text{ m·s}^{-2}$, $a_4 \approx -0{,}90 \text{ m·s}^{-2}$. 2 b

Pozn.: S ohľadom na nepresnosť grafickej konštrukcie sú prijateľné odchýlky ± 10 % od uvedených hodnôt.

3. Sústava telies

Riešenie:

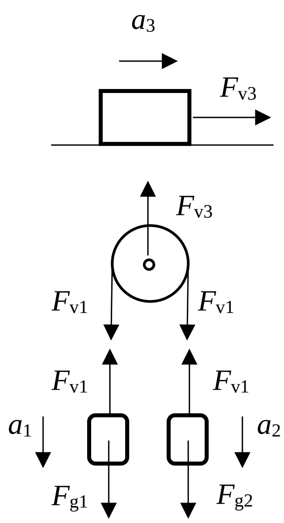
a) Ak je $m_1 = m_2$, na kladke K2 je rovnováha a sústava K2 T1 T2 sa pohybuje ako jedno teleso. Výsledná tiažová sila $F_1 + F_2 = (m_1 + m_2)\,g$ udeľuje sústave všetkých troch telies zrýchlenie

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_1 + m_2)\,g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2}{3}g\,.$$

Telesá sa pohybujú rovnomerne zrýchleným pohybom. Dráhu h_0 prekonajú za čas

$$t_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{2h_0}{a}} = \sqrt{\frac{3h_0}{g}}\,. \qquad 2\text{ b}$$

b) Analyzujeme sily pôsobiace na jednotlivé časti sústavy podľa obr. RD–2.



Obr. RD–2

Pohybová rovnica telesa T3

$$m_3\,a_3 = F_{v3}\,.$$

Keďže neuvažujeme moment zotrvačnosti kladky K2, vo vlákne na ľavej strane aj na pravej strane pôsobí rovnaká sila $F_{v1} = ½\,F_{v3}$. Pohybové rovnice telies T1 a T2 sú

$$m_1\,a_1 = m_1\,g - F_{v1} = m_1\,g - \frac{1}{2}F_{v3} = m_1\,g - \frac{1}{2}m_3\,a_3\,,$$

$$m_2\,a_2 = m_2\,g - F_{v1} = m_2\,g - \frac{1}{2}F_{v3} = m_2\,g - \frac{1}{2}m_3\,a_3\,.$$

Keďže $m_2 > m_1$, bude aj $a_2 > a_1$.
Zrýchlenie kladky je potom

$$a_3 = a_1 + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\,.$$

Po dosadení do pohybových rovníc telies T1 a T2 máme

$$m_1\,a_1 = m_1\,g - \frac{1}{4}m_3(a_1 + a_2)$$

$$m_2\,a_2 = m_2\,g - \frac{1}{4}m_3(a_1 + a_2)\,.$$

Ich riešením dostávame

$$a_1 = \frac{4m_1m_2 + m_1m_3 - m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}g = \frac{1}{3}g\,, \qquad 2\text{ b}$$

$$a_2 = \frac{4m_2m_1 - m_1m_3 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}g = \frac{5}{9}g\,, \qquad 2\text{ b}$$

$$a_3 = \frac{4}{9}g\,. \qquad 2\text{ b}$$

Na podložku dopadne ako prvé teleso T2 za čas

$$t_\mathrm{b} = \sqrt{\frac{2h_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{18h_0}{5g}}\,. \qquad 2\text{ b}$$

4. Plávajúca fľaša

Riešenie:

a) Ak sa fľaša ponorí do vody a zostane plávať, objem ponorenej časti zodpovedá objemu vody s hmotnosťou rovnou hmotnosti fľaše. O objem ponorenej časti fľaše sa zväčší objem pod hladinou vody $\Delta V = S\,h_1$ a platí

$$S\,h_1\,\rho_0 = m_0 \approx 500\ \text{g}. \qquad 2\ \text{b}$$

Pozn.: Zvýšenie hladiny je rovnaké, ako keby sme do nádoby naliali vodu s hmotnosťou m_0, tzn. zväčšili jej objem o $\dfrac{m_0}{\rho_0} = S\,h_1$.

b) Celá ponorená fľaša vytlačí objem vody rovný jej vonkajšiemu objemu $V_{\text{von}} = V_{\text{vn}} + V_{\text{s}}$, ktorý je súčtom vnútorného objemu V_{vn} a objemu skla $V_{\text{s}} = m_0/\rho_{\text{s}}$, pričom platí

$$m_0 + m = \left(V_{\text{vn}} + S\,h_1 \frac{\rho_0}{\rho_{\text{s}}}\right)\rho_0\,,$$

odkiaľ máme

$$m = V_{\text{vn}}\,\rho_0 - m_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{s}}}\right) \approx 500\ \text{g}. \qquad 3\ \text{b}$$

c) Po ponorení fľaše až po jej otvor sa zvýši objem pod hladinou vody v nádobe o vonkajší objem fľaše

$$\left(V_{\text{vn}} + \frac{m_0}{\rho_{\text{s}}}\right) = S\left(h_1 + h_2\right),$$

odkiaľ dostávame

$$h_2 = \frac{1}{S}\left(V_{\text{vn}} + S\,h_1 \frac{\rho_0}{\rho_{\text{s}}}\right) - h_1 = \frac{V_{\text{vn}}}{S} - h_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{s}}}\right) \approx 20\ \text{mm}. \qquad 3\ \text{b}$$

d) V okamihu, keď otvor fľaše dosiahne úroveň hladiny v nádobe, zostane vo fľaši prázdny priestor s objemom $V_{\text{vn}} - m/\rho_0$. Keď fľaša klesne ku dnu, tento priestor sa zaplní vodou, čo spôsobí pokles hladiny vody v nádobe

$$h_3 = -\frac{1}{S}\left(V_{\text{vn}} - \frac{m}{\rho_0}\right) = -\,h_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{s}}}\right) \approx -\,12\ \text{mm}.$$

Po zaplnení fľaše hladina poklesne o 12 mm. 2 b

5. Valec vo vode

Riešenie:

a) Ak valec voľne pláva, je tiažová sila valca A rovná vztlakovej sile

$V_{\text{A}}\rho_{\text{A}}\,g = p_0\,V_{\text{A}}\,\rho_{\text{v}}\,g$, kde $p_0 = 2/3$ je pomer ponorenia valca.

Odtiaľ máme hustotu valca

$$\rho_{\text{A}} = p_0\,\rho_{\text{v}} \approx 0{,}67\ \text{g·cm}^{-3}. \qquad 1\ \text{b}$$

b) Sú dve možnosti:

1. Závažie je ťažké, zostane na dne nádoby, aj keď voda dosiahne hornú podstavu valca.

2. Skôr ako voda dosiahne hornú podstavu valca sa začne závažie dvíhať a ponor valca sa už ďalej nemení.

Medzný prípad predstavuje situácia, keď sústava valec–závažie sa vo vode vznáša, tzn. tiažová sila sústavy valec–závažie je rovná sile vztlakovej

$$\left(m_Z + m_A\right) g = \left(\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_Z}{\rho_Z}\right) \rho_v \, g \text{ , kde index A znamená valec a Z závažie.}$$

Dosadíme za hustotu a hmotnosť valca a určíme medznú hustotu ρ_{Zm} závažia

$$\rho_{Zm} = \frac{4 m_Z}{4 m_Z - \pi d^2 v \rho_v \left(1 - p_0\right)} \rho_v \approx 9{,}77 \text{ g·cm}^{-3}.$$

Ak $\rho_Z > \rho_{Zm}$ (olovo) závažie zostane na dne a voda postupne dosiahne až hornú podstavu valca, tzn. ponor $p_1 = 1$. 1 b

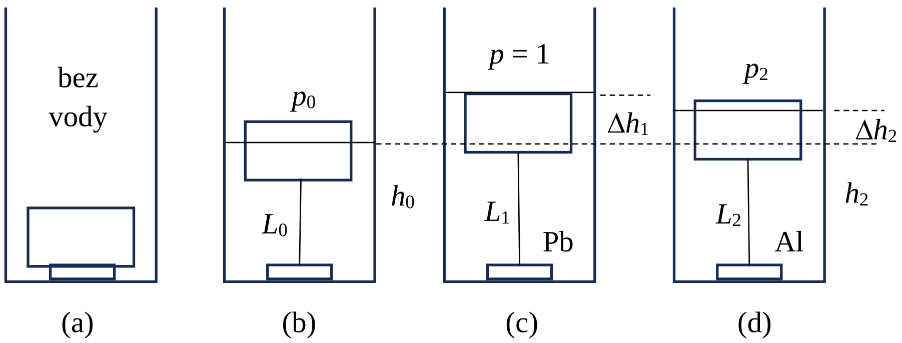
Pre $\rho_Z < \rho_{Zm}$ sústava (hliník) valec–závažie zostane plávať, pričom ponor valca $p_2 < 1$, a teda valec vyčnieva nad hladinu vody v nádobe.
Pre plávajúcu sústavu platí

$$\left(m_Z + m_A\right) g = \left(p_2 V_A + \frac{m_Z}{\rho_h}\right) \rho_v \, g \, .$$

Odtiaľ dostávame

$$p_2 = p_0 + \frac{4 m_Z}{\pi d^2 v \rho_v}\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_h}\right) \approx 0{,}90.$$

Valec bude vyčnievať nad hladinu približne 10 % objemu. 2 b
Jednotlivé situácie sú znázornené v obr. RD–3. (a) pred naliatím vody, (b) valec pláva, gumička je



Obr. RD–3

vyrovnaná ale nenapínaná, (c) pri olovenej záťaži hladina vody dosiahne hornú podstavu, (d) pri hliníkovej záťaži dosiahne voda pod horný okraj valca. 2 b

Z obrázku vidno, že $h_0 = v_z + L_0 + p_0 v$, $h_1 = v_z + L_1 + v$, $h_2 = v_z + L_2 + p_2 v$, a odtiaľ

$$\Delta h_1 = h_1 - h_0 = L_1 - L_0 + \left(1 - p_0\right) v = \Delta L_1 + \left(1 - p_0\right) v$$

a $$\Delta h_2 = h_2 - h_0 = L_2 - L_0 + \left(p_2 - p_0\right) v = \Delta L_2 + \left(p_2 - p_0\right) v \, .$$

c) 1. Najskôr uvažujme prípad, keď hladina vody dosiahne hornú podstavu valca, pričom závažie zostane na dne. Vztlakovú silu kompenzuje tiažová sila a ťahová sila gumičky.

$$V_A \rho_v g = V_A \rho_A g + k \Delta L_1, \text{ kde } k = \frac{m_Z g}{\Delta L} \text{ je tuhosť gumičky.}$$

Po dosadení za jednotlivé veličiny a úprave dostaneme

$$\Delta h_1 = \left(\frac{\pi d^2 \rho_v \Delta L}{4 m_Z} + 1 \right) (1 - p_0) v \approx 23{,}5 \text{ mm.}$$ 2 h

2. V druhom prípade voda stúpa až kým nie je valec ponorený časťou p_2 pod hladinou. Súčasne sa gumička predĺži silou, ktorá je rovná rozdielu tiažovej sily valca a vztlakovej sily pôsobiacej na valec

$$p_2 V_A \rho_v g = V_A \rho_A g + k \Delta L_2 .$$

Po dosadení a úprave dostávame

$$\Delta h_2 = \left(\frac{\pi d^2 \rho_v \Delta L}{4 m_Z} + 1 \right) (p_2 - p_0) v = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_h} \right) \Delta L + (p_2 - p_0) v =$$

$$= \left(\Delta L + \frac{4 m_Z}{\pi d^2 \rho_v} \right) \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_h} \right)$$

Pre dané hodnoty $\Delta h_2 \approx 16{,}5$ mm. 2 h

6. Mechanická sústava

Riešenie:

a) Ak neuvažujeme trenie medzi telesom C a stolom a teleso je v pokoji, je i ťahová sila gumičky nulová, a teda gumička má nedeformovanú dĺžku ℓ_0. Znamená to, že i na teleso B pôsobí gumička nulovou silou. Na teleso B pôsobí iba sila F_0 ťahu vlákna a udeľuje mu zrýchlenie a_0

$$m_B a_0 = F_0 .$$

Na teleso A pôsobí tiažová sila $F_g = m_A g$ a v opačnom smere sila F_0 ťahu vlákna

$$m_A a_0 = m_A g - F_0 .$$

Z uvedených rovníc dostaneme

$$a_0 = \frac{m_A}{m_A + m_B} g \approx 3{,}9 \text{ m·s}^{-2}$$ 2 b

a $$F_0 = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g \approx 118 \text{ mN.}$$ 2 b

b) Pri pohybe telesa B sa v dôsledku ťahu gumičky začne pohybovať i teleso C, pričom gumička sa predlžuje. Keď sa pohyb celej sústavy ustáli, všetky telesá sa pohybujú s rovnakým zrýchlením a_1, ktoré celej sústave udeľuje tiažová sila telesa A

$$a_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} g \approx 2{,}0 \text{ m·s}^{-2}.$$ 2 b

Niť napína sila

$$F_1 = m_A g - m_A a_1 = \frac{m_B + m_C}{m_A + m_B + m_C} m_A g \approx 157 \text{ mN.}$$ 2 b

c) Telesu C toto zrýchlenie udeľuje ťahová sila gumičky

$$m_C a_1 = k(\ell - \ell_0).$$

Pre predĺženie pružiny platí

$$\ell - \ell_0 = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\,\ell_0 = \varepsilon\,\ell_0 .$$

Z uvedených rovníc dostávame

$$\ell_0 = \frac{m_A\,m_C}{m_A + m_B + m_C}\,\frac{g}{k\,\varepsilon} \approx 33\ \text{mm.}$$ 2 b

7. Meranie hustoty

Riešenie:

Odvodenie k pyknometrickej metóde:

Hmotnosť nádoby s vodou $m_2 = m_N + \rho_v V_N$, m_N je hmotnosť nádoby a sklenenej doštičky, ρ_V hustota vody a V_V objem vody v nádobe.

Hmotnosť nádoby s vodou a telesom $m_3 = m_N + \rho_v\left(V_N - V_T\right) + m_1$, kde V_T je objem telesa.

$$m_3 - m_2 = -\rho_v V_T + m_1,\ \text{odkiaľ máme}\ V_T = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{\rho_v}.$$

Hustota telesa

$$\rho = \frac{m_1}{V_T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 - m_3}\,\rho_v .$$

Posúdenie presnosti:

Určenie objemu v prvom prípade z rozmerov telesa sa dá použiť iba pre teleso pravidelného tvaru a presnosť závisí od presnosti merania rozmerov.

Určenie objemu v druhom prípade je zaťažené nepresnosťou určenia relatívnej zmeny polohy hladiny v odmernom valci, ktorá je tým väčšia, čím je teleso menšie (uplatňuje sa zakrivenie hladiny v dôsledku povrchového napätia). Metóda je dostatočne presná v prípade väčších telies.

Určenie objemu pyknometrickou metódou je dané presnosťou váženia, ktorá je v prípade dostatočne citlivých váh veľmi dobrá. Metóda je vhodná pre meranie objemu malých telies a telies nepravidelného tvaru, dôležitá je starostlivosť prevedenia merania. Presnosť sa zvyšuje použitím čo najmenšej nádoby, do ktorej sa teleso zmestí, a nádoby s čo najmenším otvorom. Dôležité je použitie tuhej nádoby, aby nemohlo dôjsť k skresleniu výsledkov jej deformáciou.

Podľa úrovne spracovania 0 – 10 b

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy domáceho kola kat. D – 1. časť
Autori úloh: Ľubomír Konrád 1, 4, 5, 6, Ivo Čáp 2, 3
Recenzia úloh: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024