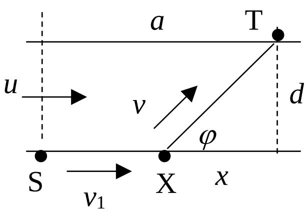
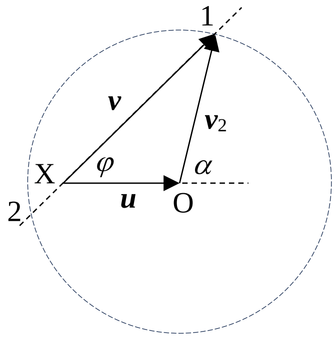
65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
1. kolo kategória C
Riešenie úloh

1. Strážca rieky

Riešenie:

a) Označme X miesto, v ktorom strážca skočí do vody. Potom musí plávať po priamej trajektórii smerom k miestu T, úsečka XT. Vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$, ktorou sa plavec pohybuje vzhľadom na breh, je vektorovým súčtom rýchlosti $\boldsymbol{u}$ vody a rýchlosti $\boldsymbol{v}_2$ plavca vzhľadom na vodu, obr. RC−1. Začiatkom vektora $\boldsymbol{u}$ vedieme priamku rovnobežnú so smerom XT. Okolo koncového bodu vektora





Obr. RC−1

$\boldsymbol{u}$ opíšeme kružnicu s polomerom v_2. Priesečník kružnice s priamkou XT určuje vektor $\boldsymbol{v}$. Ako vidíme, pre $v_2 > u$ existujú dva body 1 a 2, z ktorých iba bod 1 má význam.
Čas pohybu z miesta S do miesta T je

$$t = \frac{a-x}{v_1} + \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v}, \tag{1}$$

kde v je rýchlosť plavca vzhľadom na breh.

Veľkosť v rýchlosti plavca vyjadríme pomocou kosínovej vety

$$v_2^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\varphi,$$

ktorú upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$v^2 - 2uv\cos\varphi + u^2 - v_2^2 = 0,$$

ktorá má riešenie

$$v = u\,\cos\varphi \pm \sqrt{u^2\,\cos^2\varphi}\ .$$

Uhol φ vyjadríme zo vzťahu $\tan\varphi = \dfrac{d}{x}$ a použijeme vzťah $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$.

Rýchlosť plavca

$$v = \frac{u\,x}{\sqrt{x^2+d^2}} \pm \sqrt{v_2^2 - \frac{u^2 d^2}{x^2+d^2}}\ .$$

Vyhovujúce je znamienko (+), pozri obr. RC−1 bod 1.
Po dosadení do (1) dostávame

$$t = \frac{a-x}{v_1} + \frac{d^2 + x^2}{u\,x + \sqrt{v_2^2\left(x^2 + d^2\right) - u^2 d^2}}\,. \qquad (2) \qquad 3\text{ b}$$

b) Pre $u = 0$ máme

$$t = \frac{a-x}{v_1} + \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_2}\,. \qquad (3)$$

Minimum dostaneme z podmienky nulovej derivácie

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\frac{2x}{2\sqrt{d^2 + x^2}} = 0\,,$$

odkiaľ $\dfrac{x_1}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \dfrac{v_2}{v_1} = \cos\varphi$

a ďalej

$$x_1 = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}\,d \approx 12{,}6\ \text{m},$$

a teda

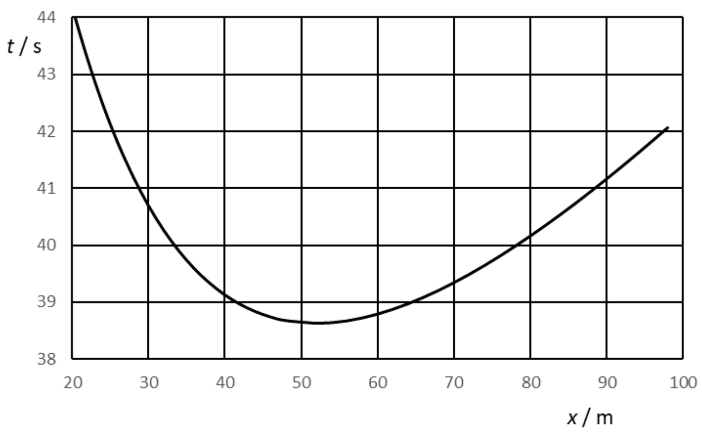
$$b_1 = a - x_1 = a - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}\,d \approx 87{,}4\ \text{m}.$$

Po dosadení do (6)

$$t_1 = \frac{1}{v_1}\left(a + d\sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1}\right) \approx 45{,}4\ \text{s}. \qquad 3\text{ b}$$

Možno tiež použiť postup pomocou grafu ako v časti c).

c) Pre $u > 0$ je výraz (2) pomerne komplikovaný na určovanie minima pomocou nulovej hodnoty derivácie. Použijeme teda grafickú metódu. Vzťah (2) naprogramujeme vo vhodnom počítačovom programe (napr. MS EXCEL), získame tabuľku hodnôt a graf funkcie.



Graf 2 b

Z grafu, resp. tabuľky hodnôt dostávame pre dané hodnoty veličín:

$t_2 \approx 38{,}6$ s, $x_2 \approx 52{,}0$ m, $b_2 \approx 48$ m. 2 b

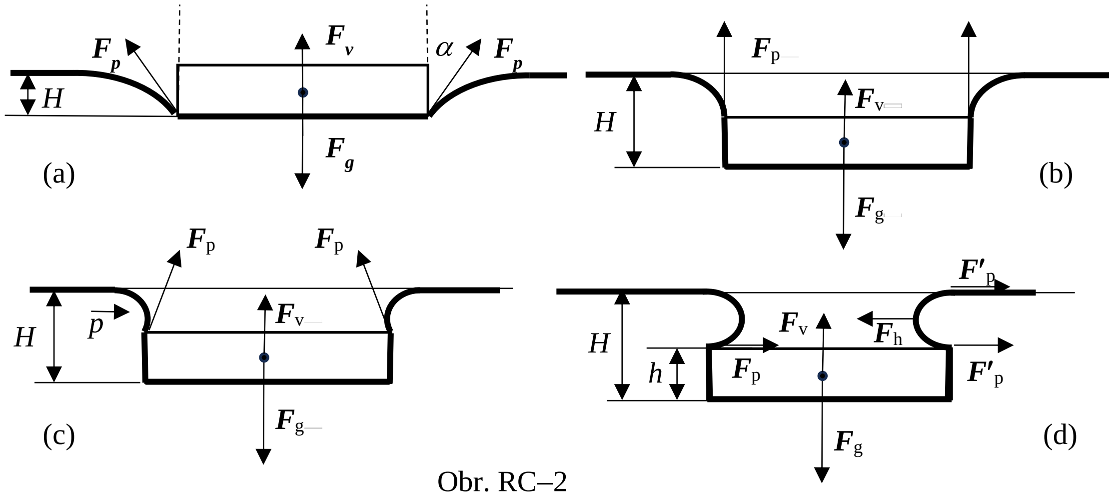
2. Povrchové napätie

Riešenie:

a) Povrchové napätie sa prejavuje, ako keby bola na povrchu tenká blana s pevnosťou σ. Ak je vložené teleso vo vode nezmáčavé, blana sa správa, ako keby bolo položené na túto blanu. Ak nie je teleso príliš ťažké, blana ho udrží, obr. RC–2.

Sila povrchového napätia pôsobiaca na kotúč je rozložená po celom obvode dolnej podstavy. Jej priemet do zvislého smeru $F_{\mathrm{p}} \cos\alpha$ je v rovnováhe s tiažovou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$, zmenšenou o vztlakovú silu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$, tzn. tlakovou silou vody na dolnú podstavu kotúča.

Pri narastaní hmotnosti sa kotúč ponára hlbšie a $\cos\alpha$ narastá až k maximálnej hodnote, kedy je sila povrchového napätia orientovaná smerom hore. Povrchová blana sa primkne k stenám valca, čím kotúč o h poklesne, obr. RC–2 (b), tým vzrastie vztlaková sila na podstavu, a teda kotúč môže



Obr. RC–2

klesať ešte hlbšie. Vidíme, že voda nad kotúč stále neprenikά.

Pri ďalšom ponáraní tlak okolitej vody vtláča povrchovú blanu nad kotúč, obr. RC–2 (c), až do krajnej polohy, obr. RC–2 (d), kedy sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ povrchového napätia dosiahne vodorovný smer. Tiažová sila je potom v rovnováhe iba so silou vztlakovou. Ak bočná tlaková sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}$ pôsobiaca na povrchovú blanu dosiahne hodnotu 2 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$, dôjde k vniknutiu vody nad kotúč a ten sa potopí.

Výstižný opis javu a výstižné obrázky 4 b

b) V krajnej polohe, obr. RC–2 (d), sú sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}$ vodorovné. Pre sily pôsobiace na malý úsek ds obvodu kotúča platí

$$2\sigma\, ds = p_{\mathrm{s}}\, dS = \frac{1}{2}\left(H-h\right)\rho_0\, g\,\left(H-h\right) ds\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre rovnováhu síl v zvislom smere máme

$$m\,g = H\,\rho_0\,g\,\frac{\pi d^2}{4}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Z týchto vzťahov dostávame hĺbku ponorenia kotúča

$$H = h + \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho_0\, g}}\,. \qquad 1\text{ b}$$

Rovnováhe v tejto hĺbke ponorenia zodpovedá hmotnosť kotúča

$$m = H\rho_0 \frac{\pi d^2}{4} = \rho_0 \frac{\pi d^2}{4}\left(h + \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho_0 g}}\right) = \rho_{\mathrm{Al}} \frac{\pi d^2}{4} h\,. \qquad 1\ \mathrm{b}$$

Zodpovedajúca hrúbka kotúča

$$h = \frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_0}\sqrt{\frac{4\sigma}{\rho_0 g}} \approx 3{,}2\ \mathrm{mm}. \qquad 2\ \mathrm{b}$$

3. Odporová sieťka

Riešenie:

a) Odpor sieťky medzi uzlami CD

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{U}{I_1}\,.$$

Odpor vyjadríme pomocou odporu úsekov

$$\frac{1}{R_{\mathrm{CD}}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{3\frac{r\,3r}{r+3r}} = \frac{16}{9r}\,.$$

Odtiaľ dostávame $r = \frac{16}{9} R_{\mathrm{CD}} = \frac{16}{9}\frac{U}{I_1} \approx 32\ \Omega.$ 3 b

b) Pre odpor medzi uzlami AB máme

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + \frac{r\,3\frac{3}{4}r}{r+3\frac{3}{4}r}} = \frac{48}{35\,r}\,.$$

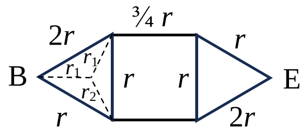
Prúd po pripojení zdroja na uzly A a B

$$I_2 = \frac{U}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{48}{35}\frac{U}{r} = \frac{57}{41}\frac{9}{16} I_1 \approx 391\ \mathrm{mA}. \qquad 3\ \mathrm{b}$$

c) Obvod zjednodušíme na tvar podľa obr. RC–3. Potom trojuholníky s vrcholmi B a E transformujeme na hviezdu (naznačenú pri vrchole B čiarkovanou čiarou – rovnako pri vrchole E), pričom

$$r_1 = \frac{r\,2r}{r+r+2r} = \frac{r}{2} \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{r\,r}{r+r+2r} = \frac{r}{4}\,.$$

$$R_{\mathrm{BE}} = 2r_1 + \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{3}{4}r + r_2\right) = \frac{7r}{4}\,.$$



Obr. RC–3

Prúd zdroja

$$I_3 = \frac{U}{R_{\mathrm{BE}}} = \frac{4}{7}\frac{9}{16} I_1 \approx 161\ \mathrm{mA}. \qquad 4\ \mathrm{b}$$

4. Vodivá retiazka

Riešenie:

Celková dĺžka prívesku je rovná súčtu priemerov krúžkov

$$L = \sum_{i=1}^{N} D_i \text{ , kde } N \text{ je počet krúžkov.} \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Celková hmotnosť ozdoby je súčet hmotností jednotlivých krúžkov

$$m = \sum_{i=1}^{N} \rho_\mathrm{m} V_i = \sum_{i=1}^{N} \rho_\mathrm{m} \frac{\pi d^2}{4} \pi D_i = \frac{\pi^2 d^2 \rho_\mathrm{m}}{4} \sum_{i=1}^{N} D_i = \frac{\pi^2 d^2 \rho_\mathrm{m}}{4} L \,. \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Celkový odpor ozdoby je súčet odporov jednotlivých krúžkov medzi spojmi so susednými krúžkami, tzn. dvoch paralelných polkrúžkov

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_\mathrm{R} \frac{\frac{\pi D_i}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \sum_{i=1}^{N} \rho_\mathrm{R} \frac{D_i}{d^2} = \frac{\rho_\mathrm{R}}{d^2} \sum_{i=1}^{N} D_i = \frac{\rho_\mathrm{R}}{d^2} L \,. \qquad (3) \qquad 2\text{ b}$$

Zo vzťahov (2) a (3) dostávame

$$L = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{mR}{\rho_\mathrm{m} \rho_\mathrm{R}}} \text{ , pre dané hodnoty } L \approx 32 \text{ cm.} \qquad 2\text{ b}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \rho_\mathrm{R}\, m}{\pi^2 \rho_\mathrm{m} R}} \text{ , pre dané hodnoty } d \approx 0{,}69 \text{ mm.} \qquad 2\text{ b}$$

Dĺžku použitého drôtu určíme z jeho hmotnosti a priemeru

$$m = \rho_\mathrm{m} V = \rho_\mathrm{m} \frac{\pi d^2}{4} l \text{ , odkiaľ}$$

$$l = \frac{4m}{\pi \rho_\mathrm{m} d^2} = 2 \sqrt{\frac{mR}{\rho_\mathrm{R} \rho_\mathrm{m}}} \approx 100 \text{ cm.} \qquad 2\text{ b}$$

5. Voda a ortuť v U–trubici

Riešenie:

a) V celej vodorovnej časti U-trubice je konštantný tlak (Pascalov zákon). Sprava vytvára tlak stĺpec ortuti, zľava stĺpec vody. Výška vodného stĺpca $h_\mathrm{v} = x - h$, kde x je celková dĺžka vodného stĺpca.

$$p_\mathrm{a} + h \rho_\mathrm{o} g = p_\mathrm{a} + (x - h) \rho_\mathrm{v} g \,,$$

odkiaľ máme

$$h = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{o} + \rho_\mathrm{v}} x \,.$$

Pre výslednú dĺžku L vodného stĺpca dostávame

$$h_1 = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{o} + \rho_\mathrm{v}} L \approx 1{,}38 \text{ cm.} \qquad 2\text{ b}$$

b) V tomto prípade závisí tlak vzduchu na hladinu ortuti od výšky h ortuti. Ak stláčanie považujeme za izotermické, platí

$$p_a\, H_1 = p\left(H_1 - h\right).$$

Tlak vo vodorovnej časti

$$p + h\,\rho_o\, g = p_a + \left(x - h\right)\rho_v\, g \text{ , resp. } p_a \frac{H_1}{H_1 - h} + h\,\rho_o\, g = p_a + \left(x - h\right)\rho_v\, g\,.$$

Odtiaľ dostávame kvadratickú rovnicu pre h

$$h^2 - \left[H_1 + \frac{p_a + \rho_v\, g\, x}{g\left(\rho_v + \rho_o\right)}\right]h + \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_o} x H_1 = 0\,,$$

ktorá má riešenie

$$h = \frac{1}{2}\left[H_1 + \frac{p_a + \rho_v\, g\, x}{g\left(\rho_v + \rho_o\right)}\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[H_1 + \frac{p_a + \rho_v\, g\, x}{g\left(\rho_v + \rho_o\right)}\right]^2 - \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_o} x H_1}\,.$$

Z podmienky $h = 0$ pre $x = 0$ zistíme, že zmysel má znamienko (-).

Výsledná výška ortuťového stĺpca v pravom ramene pre $x = L$ je $h_2 \approx 3{,}0$ mm. 3 b

c) Ak sa U−trubica otáča, pôsobí na kvapalinu vo vodorovnej časti odstredivá sila, ktorá spôsobí rozdiel tlaku medzi jej koncom pri osi otáčania a druhým koncom. Na malý úsek dĺžky Δy vodorovnej časti stĺpca pôsobí sila

$$\Delta F = \rho\, S\, \Delta y\, \omega^2\, y\,,$$

kde y je vzdialenosť úseku od osi otáčania, tzn. polomer kružnice obehu.

Tomu zodpovedá prírastok tlaku

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \rho\,\omega^2\, y\,\Delta y\,.$$

Merný prírastok tlaku je priamoúmerný polomeru y

$$\frac{\Delta p}{\Delta y} = \rho\,\omega^2\, y\,.$$

Celkový prírastok tlaku je rovný súčinu priemerného merného prírastu a rozdielu polomerov začiatku a konca vodorovnej časti stĺpca. Časť vodorovného stĺpca je voda a časť ortuť, preto celkový prírastok tlaku pozostáva z dvoch častí. Rozhranie vody a ortuti má polomer $y = h$, a tak

$$\Delta p = \frac{1}{2}\left(\rho_v\,\omega^2\, h\right)h + \frac{1}{2}\left(\rho_o\,\omega^2\, L - \rho_o\,\omega^2\, h\right)\left(L - h\right)$$

Rozdiel tlaku je v rovnováhe s rozdielom hydrostatického tlaku zvislých stĺpcov kvapalín

$$p_a + \left(L - h\right)\rho_v\, g + \Delta p = h\,\rho_o\, g + p_a\,.$$

Po dosadení za Δp a úprave dostávame

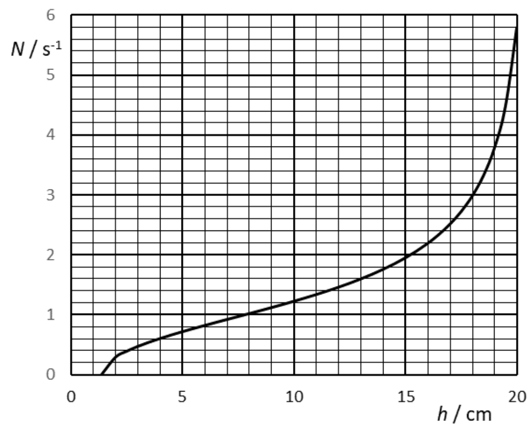
$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2g\,\frac{h\left(\rho_o + \rho_v\right) - L\,\rho_v}{\rho_o L^2 - h^2\left(\rho_o - \rho_v\right)}}$$

pre $h \geq h_1$. 2 b

Graf závislosti $N = \mathrm{f}(h)$. 2 b

Pre $x = L$ dostávame

$N_m \approx 5{,}8\ \mathrm{s}^{-1}$. 1 b



6. Plyny vo valci s piestom

Riešenie:

a) Hmotnosť plynu určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p_a S L = \frac{m_{He}}{M_{He}} R T_0 .$$

Odtiaľ máme (pre tabuľkové hodnoty M_{He} = 4,0 g·mol^{-1}, R = 8,3 J·K^{-1}·mol^{-1})

$$m_{He} = \frac{p_a M_{He}}{R T_0} S L \approx 0{,}41 \text{ g.}$$ 1 b

b) Ak sa hélium stláča izotermicky, platí

$$p_a S L = p_0 S (L - x_0) .$$

Hmotnosť kyslíka $m_O = \frac{p_0 M_O}{R T_0} S x_0 = m_{He} = \frac{p_a M_{He}}{R T_0} S L .$

Z uvedených vzťahov po úprave dostaneme (pre M_O = 32 g·mol^{-1})

$$x_0 = \frac{M_{He}}{M_O + M_{He}} L \approx 5{,}6 \text{ cm.}$$ 2 b

c) Ak sa hélium stlačí izotermicky na polovičný objem, zvýši sa tlak na dvojnásobok

$p_1 = 2\, p_a$. 1 b

Hmotnosť kyslíka pri objeme $S\,L/2$, teplote t_0 a tlaku p_1 je

$$m_O = \frac{2\, p_a M_O}{R T_0} S \frac{L}{2} \approx 3{,}3 \text{ g.}$$ 2 b

d) Pri rýchlom posunutí sa nestačí odviesť teplo cez steny valca, a dej preto možno považovať za adiabatický, pre ktorý platí stavová rovnica

$$p_a (S L)^\kappa = p_2 \left(S \frac{L}{2} \right)^\kappa, \text{ kde } \kappa = \frac{s+2}{s} .$$

Pre jednoatómové molekuly $s = 3$, a teda $\kappa = 5/3$.

Výsledný tlak

$$p_2 = 2^{5/3} p_a \approx 317 \text{ kPa.}$$ 1 b

Výslednú teplotu určíme zo stavovej rovnice

$$\frac{p_2 S L}{2 T_2} = \frac{p_a S L}{T_0} ,$$

odkiaľ máme

$$T_2 = \frac{p_2}{2\, p_a} T_0 = 2^{2/3} T_0 \approx 465 \text{ K} = 192\ °\text{C.}$$ 1 b

Pri adiabatickom stlačení piest vykoná prácu, ktorá je rovná zmene vnútornej energie

$$\Delta U_2 = C_V (T_2 - T_0) = \frac{s}{2} n R (T_2 - T_0) .$$

Potom dochádza k izochorickému ochladeniu hélia, pri ktorom sa nekoná práca, a teda odvedené teplo je rovné úbytku vnútornej energie. Keďže množstvo plynu sa nemení, je úbytok vnútornej energie je rovný prírastku vnútornej energie počas stlačenia

$$Q = \Delta U_2 = \frac{s}{2} \frac{p_a S L}{T_0} (T_2 - T_0) = \frac{s}{2} p_a S L \left(2^{2/3} - 1 \right) \approx 220 \text{ J.}$$ 2 b

7. Steinerova veta

Riešenie:

1) Pre určenie vzdialenosti a a rozmerov telesa použite pravítko.
2) Dobu kmitu treba určiť z merania doby približne 50 kmitov.
3) Na osi grafu treba vyniesť I a a^2, bodmi získanými meraním treba preložiť priamku, prípadne pomocou kalkulačky alebo programu MS EXCEL urobiť lineárnu regresiu.
4) Úsek na osi I určený priesečníkom priamky s osou zodpovedá I_o, smernica priamky udáva m. Ak použijeme regresný program, hodnoty I_o a m získame priamo ako výsledok.

Podľa úrovne spracovania 0 až 10 b

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy domáceho kola kat. C

Autori úloh:	Ľubomír Konrád 2, 3, 4, 5, 6, Ivo Čáp 1, 7
Recenzia úloh:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024