65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
domáce kolo kategória B
riešenie úloh

1. Družica

Riešenie:

a) Ak z daného miesta na Zemi máme vidieť družicu stále na tom istom mieste, družica musí byť stále nad rovnakým miestom na Zemi, musí sa pohybovať v rovine rovníka a jej obežná doba T_{GS} je rovnaká ako doba otočenia Zeme okolo osi o 360°. 1 b

Pohybová rovnica má tvar

$$m\left(\frac{2\pi}{T_Z}\right)^2 (R_Z + h_{GS}) = G\frac{M_Z m}{(R_Z + h_{GS})^2},$$

odkiaľ máme

$$h_{GS} = \sqrt[3]{G\frac{M_Z}{4\pi^2}T_Z^2} - R_Z \approx 35\,920 \text{ km} \approx 5{,}6\, R_Z. \qquad 2 \text{ b}$$

b) Parkovacia orbita je kružnica. Na posunutie na GS orbitu je potrebné prejsť na eliptickú trajektóriu, ktorej apogeum je vo vzdialenosti h_{GS} nad povrchom Zeme. To sa dosiahne zrýchlením modulu na potrebnú rýchlosť. Po dosiahnutí apogea je potrebné urýchliť modul, aby z eliptickej trajektórie prešiel na kružnicovú geostacionárnu. 2 b

c) Rýchlosť modulu na parkovacej orbite je v_1

$$m_1\frac{v_1^2}{R_Z + h_P} = G\frac{M_Z m_1}{(R_Z + h_P)^2}, \text{ odkiaľ } v_1 = \sqrt{G\frac{M_Z}{R_Z + h_P}} \approx 7{,}80 \text{ km·s}^{-1}.$$

Na požadovanú eliptickú trajektóriu prejde po zrýchlení na rýchlosť v_2. Zo zákona zachovania mechanickej energie pre perigeum a apogeum dostaneme

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - G\frac{M_Z m_2}{R_Z + h_P} = \frac{1}{2}m_2 v_3^2 - G\frac{M_Z m_2}{R_Z + h_{GS}}.$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti máme

$$m_2 v_2 (R_Z + h_P) = m_2 v_3 (R_Z + h_{GS}).$$

Z oboch rovníc určíme rýchlosti

$$v_2 = \sqrt{2GM_Z\frac{R_Z + h_{GS}}{(R_Z + h_P)(2R_Z + h_{GS} + h_P)}} \approx 10{,}26 \text{ km·s}^{-1},$$

$$v_3 = \sqrt{2GM_Z\frac{R_Z + h_P}{(R_Z + h_{GS})(2R_Z + h_{GS} + h_P)}} \approx 1{,}60 \text{ km·s}^{-1}.$$

Rýchlosť modulu na GS orbite je

$$v_4 = \sqrt{G\frac{M_Z}{R_Z + h_{GS}}} \approx 3{,}08 \text{ km·s}^{-1}.$$

Určenie rýchlostí 3 b

Zrýchľovanie realizuje raketový motor, ktorý využíva zákon zachovania hybnosti v inerciálnej sústave. Na parkovacej orbite platí

$$m\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}m\, v_\mathrm{r}\,,$$

kde $-\mathrm{d}m$ je hmotnosť emitovaných spalín v krátkom časovom intervale ($\mathrm{d}m < 0$ je zmena hmotnosti modulu).

$$\mathrm{d}v = -v_\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}m}{m} \text{ a po integrovaní } v_2 - v_1 = -v_\mathrm{r}\ln\frac{m_2}{m_1}\text{, resp. } m_2 = m_1\,\mathrm{e}^{-\frac{v_2-v_1}{v_\mathrm{r}}}\,.$$

Odtiaľ dostávame hmotnosť spotrebovaného paliva

$$m_{\mathrm{p}1} = m_1 - m_2 = m_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{v_2-v_1}{v_\mathrm{r}}}\right).$$

Rovnako určíme hmotnosť paliva spotrebovaného na geostacionárnej orbite

$$m_{\mathrm{p}2} = m_2 - m_3 = m_2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{v_4-v_3}{v_\mathrm{r}}}\right).$$

Celková hmotnosť spotrebovaného paliva

$$m_\mathrm{p} = m_{\mathrm{p}1} + m_{\mathrm{p}2} = m_1\left(1-\mathrm{e}^{\frac{v_1-v_2+v_3-v_4}{v_\mathrm{r}}}\right) \approx 0{,}583\, m_1 \approx 1{,}75 \text{ t.}$$ 2 b

2. Exoplanéty

Riešenie:

a) Zo zadania vyplýva, že skúmame možnosť odhaliť exoplanétu meraním zmeny vlnovej dĺžky svetla vyžarovaného hviezdou v dôsledku ovplyvnenia jej pohybu obiehaním exoplanéty, spôsobenej Dopplerovým javom. Exoplanéta obieha okolo spoločného hmotného stredu s hviezdou, tzn. i hviezda sa pohybuje po kružnicovej trajektórii okolo spoločného hmotného stredu. Ak sa spozoruje periodická zmena vlnovej dĺžky svetla hviezdy zodpovedajúca perióde obiehania exoplanéty, možno to považovať za dôkaz o existencii exoplanéty. Je otázka, či je zmena vlnovej dĺžky dostatočná na jej zistenie spektrometrom.

3 b

b) Ako model sústavy hviezda exoplanéta použijeme Slnečnú sústavu, menovito sústavu Slnko Jupiter.

Obežnú dobu Jupitera určíme pomocou 3. Keplerovho zákona

$$T_\mathrm{J} = T_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{r_\mathrm{J}^3}{r_\mathrm{Z}^3}}\,.$$

Polomer trajektórie Jupitera je

$$r_\mathrm{J} = r_\mathrm{Z}\left(\frac{T_\mathrm{J}}{T_\mathrm{Z}}\right)^{2/3}.$$ 1 b

Ak sa planéta s hmotnosťou m pohybuje okolo Slnka po kružnicovej trajektórii s polomerom r rýchlosťou v, má pohybová rovnica planéty tvar

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_\mathrm{S}\, m}{r^2}$$

odkiaľ

$$v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$, kde G je gravitačná konštanta. 1 b

Rýchlosti Jupitera a Zeme sú

$$v_J = \sqrt{\frac{G M_S}{r_J}} \quad \text{a} \quad v_Z = \sqrt{\frac{G M_S}{r_Z}} ,$$

pričom

$$\frac{v_J}{v_Z} = \sqrt{\frac{r_Z}{r_J}} .$$

Slnko a Jupiter obiehajú okolo spoločného hmotného stredu. Ak zanedbáme vplyv iných planét, v sústave hmotného stredu je celková hybnosť sústavy nulová, a teda hybnosti oboch telies majú rovnakú veľkosť a opačný smer

$$M_S v_S = m_J v_J .$$ 1 b

Obiehanie Jupitera je tak sprevádzané pohybom Slnka rýchlosťou

$$v_S = \frac{m_J}{M_S} v_J = v_Z \frac{m_J}{M_S} \sqrt{\frac{r_Z}{r_J}} = v_Z \frac{m_J}{M_S} \left(\frac{T_Z}{T_J}\right)^{1/3} .$$ 1 b

Počas jedného obehu Jupitera sa zmení rýchlosť Slnka voči pozorovateľovi o $2\,v_S$. Tomu zodpovedá podľa Dopplerovho princípu zmena vlnovej dĺžky

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2 v_S}{c} = \frac{2 v_Z}{c} \frac{m_J}{M_S} \left(\frac{T_Z}{T_J}\right)^{1/3} .$$ 1 b

Na meranie tejto zmeny vlnovej dĺžky je potrebná minimálna rozlišovacia schopnosť spektrometra

$$R_{min} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{2 v_Z} \frac{M_S}{m_J} \left(\frac{T_J}{T_Z}\right)^{1/3} \approx 1{,}20 \times 10^7 .$$ 2 b

Takúto rozlišovaciu schopnosť má dnes už veľké množstvo spektrometrov vyrobených v rôznych krajinách.

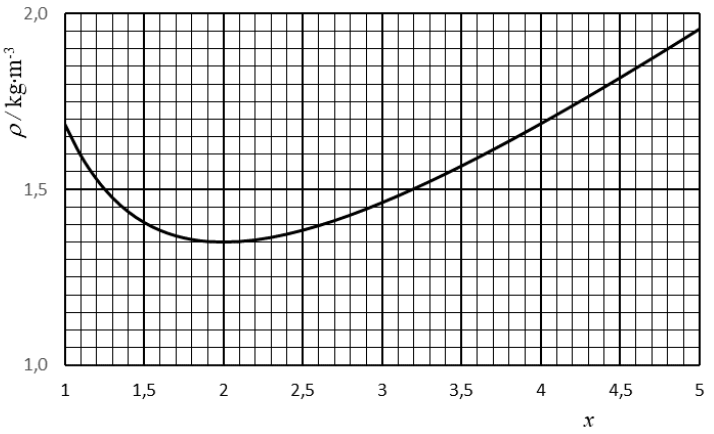
3. Tepelný dej

Riešenie:

a) Hustota plynu je

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p M_m}{RT} = \frac{4 p_0 M_m}{5 R T_0} \frac{T_0}{T} \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] = \frac{p_0 M_m}{5 R T_0} \frac{4 + x^2}{x}$$ 1 b

Graf 2 b



Z grafu možno určiť minimálnu hustotu plynu $\rho_m \approx 1{,}35$ kg·m^{-3}, pre $x \approx 2$, tzn. $T_m \approx 200$ K. 1 b

Minimum možno určiť aj z podmienky nulovej derivácie funkcie

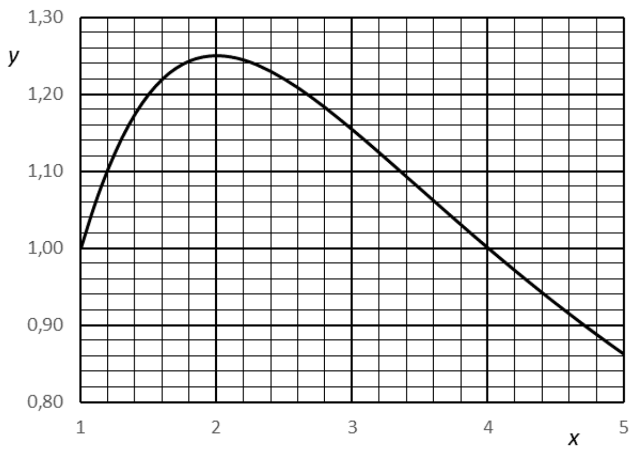
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{5RT_0} \frac{(2x)\,x - (4+x^2)\times 1}{x^2} = 0\,,$$ odkiaľ máme $x = 2$ a po dosadení $\rho_\mathrm{m} \approx 1{,}349\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

b) Pre plyn platí stavová rovnica

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}\frac{p_0}{p} = \frac{5}{4}\frac{\dfrac{T}{T_0}}{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^2}\,,$$

a teda $y = \dfrac{5x}{4+x^2}$. 1 b

Graf 1 b



Z grafu vidno, že s rastúcou teplotou sa najprv relatívny objem zväčšuje od hodnoty $y_0 = 1$ do hodnoty $y_\mathrm{m} = 1{,}25$, a potom klesá až k hodnote $y_1 \approx 0{,}862$ pre $x_1 = 5$.

Ak sa pre každú teplotu nastaví piestom objem podľa získanej závislosti, tlak sa bude meniť podľa zadanej funkcie teploty.

c) Vyjadríme relatívny tlak ako funkciu relatívnej teploty

$$\frac{p}{p_0} = \frac{4}{5}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right],$$ a teda $z = \dfrac{1}{5}\left(4+x^2\right)$. 1 b

Z parametrického vyjadrenia relatívneho objemu y a relatívneho tlaku z ako funkcií parametra x dostaneme kvadratickú rovnicu pre z

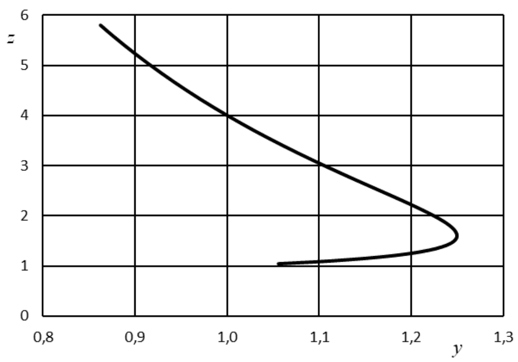
$$y^2 z^2 - 5z + 4 = 0\,,$$

ktorá má riešenie $z = \dfrac{5}{2y^2}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\dfrac{4y}{5}\right)^2}\right)$. 1 b

Reálne riešenie je dané podmienkou $y \le 5/4 = 1{,}25$. To zodpovedá výsledku časti b).

Vidíme, že riešenie má dve vetvy, jedna (dolná) so znamienkom (–), druhá (horná) so znamienkom (+).

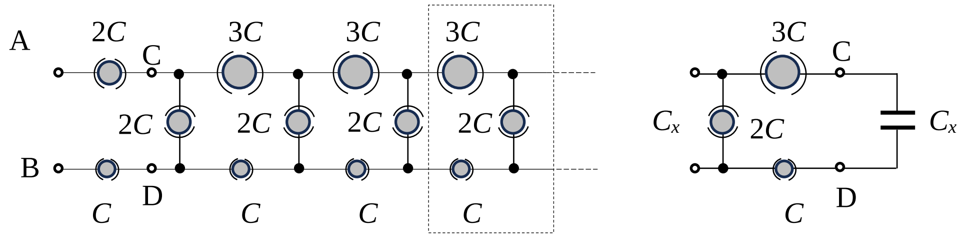
Graf závislosti relatívneho tlaku z od relatívneho objemu y je na nasledujúcom obrázku. 2 b



Iná možnosť spočíva vo výpočte y a z pre každú hodnotu parametra x, a potom graficky znázorniť získané dvojice z, y.

4. Kapacita retiazky

Riešenie:



Obr. RB - 1

Ak uvažujeme reťazec pozostávajúci z veľkého počtu článkov, pridanie ďalšieho článku výslednú kapacitu prakticky neovplyvní. Periodická štruktúra sa začína od uzlov C a D. Kapacitu reťazca označíme C_x. Ak pridáme ďalší článok, obr. RB–1, vstupná kapacita sa nezmení. 1 b

Platí teda

$$C_x = 2C + \frac{1}{\frac{1}{3C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_x}} .$$ 2 b

Odtiaľ dostaneme pre C_x kvadratickú rovnicu

$$C_x^2 - 2C\,C_x - \frac{3}{2}C^2 = 0 ,$$

ktorej riešenie má tvar

$$C_x = C\left(1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$, pričom zmysel má riešenie $C_x = C\left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) > 0$. 2 b

Pre kapacitu reťazca vzhľadom na body A a B platí

$$\frac{1}{C_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_x} = \frac{3C_x + 2C}{2C\,C_x} ,$$ 2 b

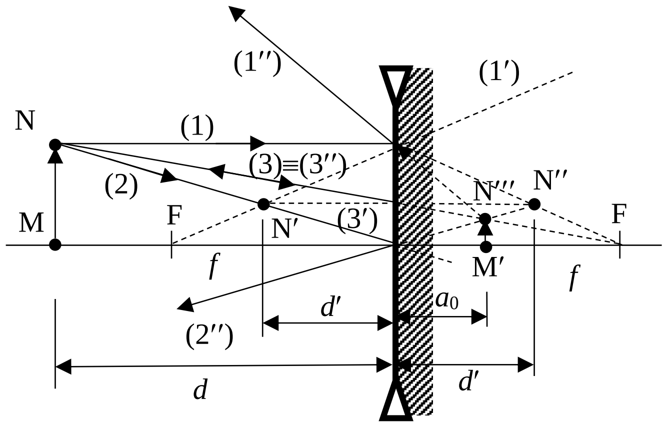
odkiaľ $$C_{\mathrm{AB}} = \frac{2C\,C_x}{3C_x + 2C} = \frac{2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}}}{5 + 3\sqrt{\frac{5}{2}}}\,C \approx 0{,}53\,C \approx 2{,}65 \text{ pF}.$$ 3 b

5. Mravec

Riešenie:

a) Obr. RB–2. 2 b

Aby sa mohli použiť charakteristické lúče, zobrazíme bod N ležiaci v rovine predmetu M ale mimo optickú os. Lúč (1) rovnobežný s osou sa láme, ako keby vychádzal z obrazového ohniska – (1′). Lúč (2) prechádzajúci stredom šošovky sa neláme. Lúč (3) idúci do predmetového ohniska sa láme rovnobežne s osou. Na priesečníku lúča (2) a lomených lúčov (1′) a (3′) je zdanlivý obraz N′ vytvorený šošovkou. Tento obraz sa zrkadlom zobrazí do bodu N″ súmerne podľa roviny zrkadla. Tento obraz N″ sa potom zobrazí šošovkou prostredníctvom lúčov odrazených od zrkadla do bodu N‴.



Obr. RB–2

Vo výsledku sa lúče (1), (2) a (3) odrážajú od sústavy ako lúče (1″), (2″) a (3″).

Prvý krok je vytvorenie obrazu šošovkou

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=-\frac{1}{|f|}.$$

Obraz N′ sa vytvorí vo vzdialenosti (v predmetovom priestore – vľavo od šošovky)

$$d'=-\frac{d\,|f|}{d+|f|}.$$

Zrkadlom sa obraz zobrazí na N″ symetricky vzhľadom na rovinu zrkadla. Obraz N″ sa stáva predmetom pre nasledujúce zobrazenie šošovkou. Vytvorí sa obraz N‴ vo vzdialenosti a_0 od šošovky, pričom platí

$$-\frac{1}{d'}+\frac{1}{a_0}=\frac{1}{|f|}$$

(predmetový priestor uvažujeme v tomto prípade vpravo od šošovky)

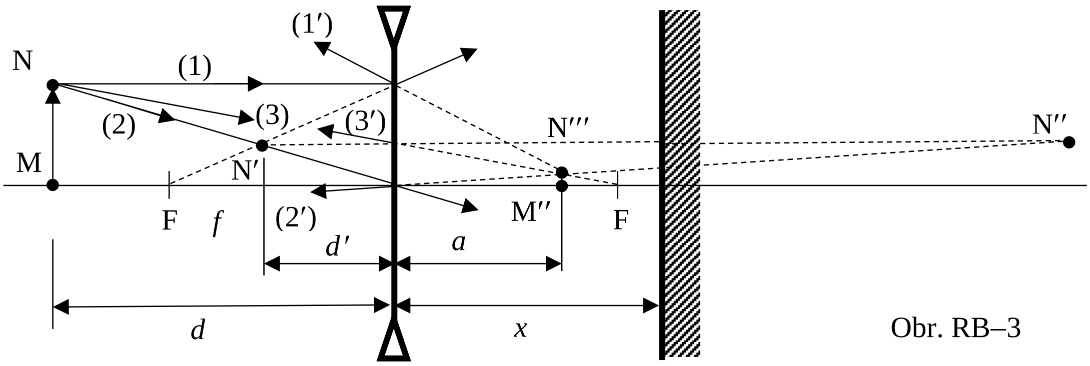
Vzdialenosť a_0 obrazu N‴, a teda aj M′, od šošovky

$$\frac{1}{a_0}=\frac{1}{|f|}+\frac{1}{|d'|}=\frac{2d+|f|}{d\,|f|}\text{, resp. } a_0=\frac{d\,|f|}{2d+|f|}\approx 11{,}3\text{ cm.}$$ 1 b

Obraz sa vytvorí napravo od šošovky (za zrkadlom), obraz je priamy, zmenšený a zdanlivý.

1 b

b) Obr. RB–3



Obr. RB–3

Bod N sa šošovkou zobrazí do bodu N′, ten sa zrkadlom zobrazí do bodu N′′ a ten sa opäť šošovkou zobrazí do bodu N′′′, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti y od šošovky, zodpovedajúcej vzdialenosti y obrazu M′′ mravca od šošovky. Pre ilustráciu sú nakreslené tri charakteristické lúče (1), (2), (3) dopadajúce na šošovku a lúče (1′), (2′), (3′) vystupujúce z šošovky v bodoch dopadu.

Prvé zobrazenie šošovkou

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=-\frac{1}{|f|}\text{, odkiaľ}\quad d'=-\frac{d\,|f|}{|f|+d}$$

Zrkadlo sa nachádza vo vzdialenosti $x = u\,t_1 \approx 35$ cm. Obraz N′′ je vo vzdialenosti $d'' = 2x + |d'|$.

Pre obraz N′′′ potom platí

$$\frac{1}{d''}+\frac{1}{a}=-\frac{1}{|f|}.$$

Po dosadení a úprave

$$a=-\frac{d''|f|}{|f|+d''}=-\frac{\left(2x+|d'|\right)|f|}{|f|+2x+|d'|}=-\frac{2ut+\dfrac{d\,|f|}{|f|+d}}{2ut+\dfrac{d\,|f|}{|f|+d}+|f|}\,|f|\,. \qquad 2\text{ b}$$

Rýchlosť pohybu obrazu určíme ako časovú deriváciu vzdialenosti y

$$v=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2|f|^2}{\left(2ut+|f|+|d'|\right)^2}\,u=\frac{2|f|^2}{\left(2ut+|f|+\dfrac{d\,|f|}{|f|+d}\right)^2}\,u\,. \qquad 1\text{ b}$$

c) Pre čas t_1 máme $a_1 \approx 22{,}4$ cm a $v_1 = 4{,}5\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$. 1 b

Obr. RB–3 2 b

6. Telesá spojené pružinou

Riešenie:

a) Pri udelení impulzu I získa teleso (1) rýchlosť $v_0 = \dfrac{I}{m_1}$.

Začiatočná kinetická energia sa mení na energiu stlačenej pružiny a prácu sily trenia.
Pri posunutí x telesa (1) smerom k telesu (2) platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} k x^2 + f\, m_1 g\, x + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 .$$

Teleso (2) sa nepohne, ak sila tlaku pružiny neprekročí silu trenia telesa (2)

$$k\, x \le f\, m_2\, g, \text{ tzn. } x \le \frac{f\, m_2\, g}{k}$$

a ak $x \le l_0 - l_{\min}$, tzn. z pružiny sa nestane tuhý valec, ktorý nárazom uvedie teleso (2) do pohybu.
Krajná hodnota, pri ktorej sa teleso 2 pohne, je

$$x_{1\,\mathrm{m}} = \min\left(\frac{f\, m_2\, g}{k},\; l_0 - l_{\min} \right). \qquad (1) \qquad 1\text{ b}$$

Ak sa teleso (1) zastaví pri dosiahnutí krajnej polohy $x_{1\mathrm{m}}$, platí rovnica

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = \frac{1}{2} k\, x_{1\mathrm{m}}^2 + f\, m_1\, g\, x_{1\mathrm{m}} .$$

Odtiaľ dostávame potrebnú začiatočnú rýchlosť

$$v_{01} = \sqrt{\frac{k}{m_1} x_{1\mathrm{m}}^2 + 2 f\, g\, x_{1\mathrm{m}}} \,,$$

a tej zodpovedá impulz sily

$$I_1 = m_1 v_{10} = m_1 \sqrt{\frac{k}{m_1} x_{1\mathrm{m}}^2 + 2 f\, g\, x_{1\mathrm{m}}} \,. \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

b) Po udelení impulzu sily I_1 telesu (1), je maximálne posunutie telesa $x_{1\mathrm{m}}$ podľa (1).
Najmenšia dĺžka pružiny

$$\ell_1 = \ell_0 - x_{1\mathrm{m}} = \ell_0 - \min\left(\frac{f\, m_2\, g}{k},\; l_0 - l_{\min} \right). \qquad (3) \qquad 1\text{ b}$$

V okamihu zastavenia pôsobí na teleso (1) tlaková sila pružiny $k\, x_{1\mathrm{m}}$. Ak je táto sila väčšia ako sila trenia $f\, m_1 g$, začne sa teleso pohybovať nazad.
Podmienka pohybu nazad je

$$k\, x_{1\mathrm{m}} > f\, m_1\, g \text{ , resp. } p = \frac{k\, x_{1\mathrm{m}}}{f\, m_1\, g} > 1 . \qquad (4) \qquad 1\text{ b}$$

Teleso sa pohybuje, až kým sa opäť nezastaví pri výchylke x_2, pre ktorú platí

$$\frac{1}{2} k\, x_{1\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2} k\, x_2^2 + f\, m_1\, g \left(x_{1\mathrm{m}} - x_2 \right) .$$

Pre x_2 dostávame rovnicu

$$x_2^2 - 2 \frac{f\, m_1\, g}{k} x_2 + 2 \frac{f\, m_1\, g}{k} x_{1\mathrm{m}} - x_{1\mathrm{m}}^2 = 0 \,,$$

ktorá má riešenie

$$x_2 = \frac{f\, m_1\, g}{k} \pm \left(\frac{f\, m_1\, g}{k} - x_{1\mathrm{m}} \right)$$, pre znamienko (–) je $x_2 = x_{1\mathrm{m}}$, čo je východisková poloha.

Ak sa teleso pohne, je výsledná výchylka

$$x_{2m} = 2\,\frac{f\,m_1\,g}{k} - x_{1m}\,. \qquad (5) \qquad 1\ \text{b}$$

Ak je $x_{2m} \geq 0$, teleso sa zastaví pred dosiahnutím začiatočnej polohy a pružina zostane stlačená. Najväčšia dĺžka pružiny je tak začiatočná dĺžka $\ell_2 = \ell_0$. 1 b

Ak je $x_{2m} < 0$, teleso prekmitne cez začiatočnú polohu a najväčšia dĺžka je

$$\ell_2 = \ell_0 - 2\,\frac{f\,m_1\,g}{k} + x_{1m}\,. \qquad 1\ \text{b}$$

c) Pre $f_1 = 0{,}20$ dostávame výsledky:

$x_{1m} \approx \min(10{,}9\ \text{mm}\ ;\ 20{,}0\ \text{mm}) = 10{,}9\ \text{mm}$ – teleso sa zastaví pred úplným stlačením pružiny
Maximálny impulz sily $I_1 \approx 51$ mN·s.
Minimálna dĺžka pružiny $\ell_1 = \ell_0 - x_{1m} \approx 14{,}1$ mm.
Podmienka (4) $p \approx 3{,}3 > 1$ je splnená a $x_{2m} \approx -4{,}4$ mm, tzn. $\ell_2 \approx 29{,}4$ mm.

Pre $f_2 = 0{,}40$ dostávame výsledky:

$x_{1m} \approx \min(21{,}8\ \text{mm}\ ;\ 20{,}0\ \text{mm}) = 20{,}0\ \text{mm}$ – teleso sa zastaví pri úplnom stlačení pružiny
Maximálny impulz sily $I_1 \approx 94$ mN·s.
Minimálna dĺžka pružiny $\ell_1 = \ell_0 - x_{1m} \approx 5{,}0$ mm.
Podmienka (4) $p \approx 3{,}1 > 1$ je splnená a $x_{2m} \approx -6{,}9$ mm, tzn. $\ell_2 \approx 31{,}9$ mm.

Pre $f_3 = 0{,}80$ dostávame výsledky:

$x_{1m} \approx \min(43{,}6\ \text{mm}\ ;\ 20{,}0\ \text{mm}) = 20{,}0\ \text{mm}$ – teleso sa zastaví pri úplnom stlačení pružiny
Maximálny impulz sily $I_1 \approx 112$ mN·s.
Minimálna dĺžka pružiny $\ell_1 = \ell_0 - x_{1m} \approx 5{,}0$ mm.
Podmienka (4) $p \approx 1{,}5 > 1$ je splnená a $x_{2m} \approx 6{,}1$ mm, tzn. $\ell_2 \approx 25{,}0$ mm (začiatočná dĺžka).

3 × 1 b

7. Prenosová charakteristika RC obvodu

Riešenie:

a) Jednotlivé napätia sú

$$\mathbf{U}_2 = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathbf{j}\omega C}}\,\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{j}\omega C R}{1 + \mathbf{j}\omega C R}\,\mathbf{U}_1 \qquad (1)$$

a $$\mathbf{U}_{12} = \frac{\dfrac{1}{\mathbf{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathbf{j}\omega C}}\,\mathbf{U}_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{j}\omega C R}\,\mathbf{U}_1\,. \qquad (2)$$

Napäťová prenosová charakteristika je

$$\mathbf{A}_U = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{\mathbf{j}\omega C R}{1 + \mathbf{j}\omega C R}\,.$$

Amplitúdová prenosová charakteristika a fázová prenosová charakteristika

$$A_U = \frac{\omega\,C R}{\sqrt{1 + (\omega\,C R)^2}} \quad \text{a} \quad \varphi_U = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\,C R)\,.$$

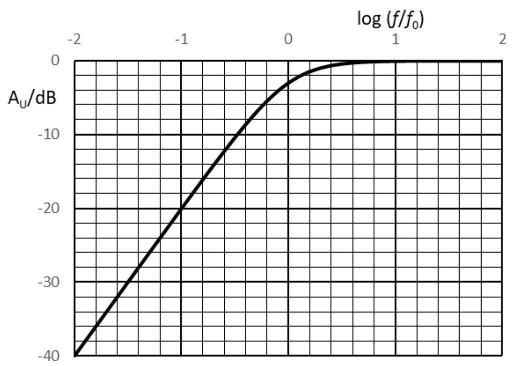
$$A_{U\mathrm{dB}} = 20 \log \frac{\omega C R}{\sqrt{1+(\omega C R)^2}} \,.$$

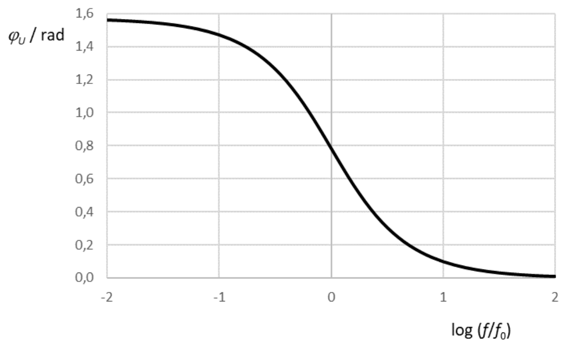
$$\left(A_{U\mathrm{dB}}\right)_0 = 20 \log \frac{\omega_0 C R}{\sqrt{1+(\omega_0 C R)^2}} = -3\,\mathrm{dB}$$ a odtiaľ $\omega_0 R C = 1$, tzn. $f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC}$.

Potom

$$A_{U\mathrm{dB}} = 20 \log \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{a} \quad \varphi_U = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Grafy funkcií:





b) Voltmeter meria efektívnu hodnotu napätia, pričom pomer amplitúd je rovný pomeru efektívnych hodnôt.

Z (1) a (2) dostávame

$$U_2 = \frac{\omega C R}{\sqrt{1+(\omega C R)^2}} U_1 \quad \text{a} \quad U_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega C R)^2}} U_1 .$$

Odtiaľ dostaneme $\omega C R = \frac{U_2}{U_{12}}$, a teda

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} \text{ alebo } A_U = \frac{U_2}{\sqrt{U_{12}^2 + U_2^2}}$$

a $\varphi_U = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{U_2}{U_{12}}$.

Podľa úrovne spracovania 0 až 10 b

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy domáceho kola kat. B

Autori úloh:	Ľubomír Konrád 2, 3, 4, 5, 6, Ivo Čáp 1, 7
Recenzia úloh:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024