63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Kategória D

Domáce kolo – riešenie úloh

1) Vzťažné sústavy

Riešenie:

a) Obvodová rýchlosť $v_S = \dfrac{2\pi r_{SG}}{T_S}$, odkiaľ máme $r_{SG} = \dfrac{v_S T_S}{2\pi}$.

Pre dané hodnoty $r_{SG} = 2{,}65 \cdot 10^{20}$ m = 28 000 ly. 2 b

b) Uvažujme hmotnosť Galaxie sústredenú v okolí jej stredu. Gravitačná sila pôsobiaca na Slnko je v rovnováhe so zotrvačnou (odstredivou) silou

$$G\frac{M_S M_G}{r_{SG}^2} = M_S \frac{v_S^2}{r_{SG}}, \text{ odkiaľ } M_G = \frac{v_S^2 r_{SG}}{G} = \frac{v_S^3 T_S}{2\pi G}.$$

Pre dané hodnoty $M_G = 1{,}92 \cdot 10^{41}$ kg ≈ 96 mld. M_S. 3 b

V astronomickej literatúre sa udáva hodnota $M_G = 5{,}8 \cdot 10^{11}$ M_S, čo je hodnota 6× väčšia než je hmotnosť celej Galaxie. Hlavnou príčinou je to, že značná časť hmotnosti Galaxie sa nachádza za hranicou orbity Slnka, ktorá k dostredivej sile neprispieva.

c) Dostredivé zrýchlenie Slnka okolo centra Galaxie je

$$a_{GS} = \frac{v_S^2}{r_{SG}} = \frac{2\pi v_S}{T_S} \approx 1{,}8\times10^{-10}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 1{,}9\times10^{-11}\, g,$$

kde pre porovnanie $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ je gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme.

Ak vzťažnú sústavu Galaxie považujeme za inerciálnu, vzťažná sústava Slnka už nie je inerciálna, v mieste Slnka je zrýchlenie a_{GS} a v mieste Slnka na teleso hmotnosti m pôsobí zotrvačná (fiktívna) sila veľkosti $F_{GS} = m\, a_{GS}$. Na teleso jednotkovej hmotnosti m = 1 kg potom pôsobí zotrvačná sila

$$F_{GS} = m\frac{2\pi v_S}{T_S} \approx 1{,}8\times10^{-10}\ \mathrm{N}.$$

Ak vzťažnú sústavu Slnka považujeme za inerciálnu sústavu, Zem obieha okolo Slnka s dostredivým zrýchlením a_{SZ} a vzťažná sústava spojená so Zemou už nie je inerciálna. V mieste Zeme má neinerciálna vzťažná sústava zrýchlenie a_{SZ}. Zem obieha okolo Slnka uhlovou rýchlosťou $\omega_{ZS} = 2\pi / T_{rok}$.

Dostredivé zrýchlenie

$$a_{SZ} = r_{SZ}\,\omega_{SZ}^2 = r_{SZ}\frac{4\pi^2}{T_{rok}^2} \approx 5{,}95\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 6{,}06\times10^{-4}\, g.$$

Zotrvačná sila pôsobiaca na teleso jednotkovej hmotnosti m = 1 kg

$$F_{SZ} = m a_{SZ} \approx 5{,}95\times10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Uvažujme vzťažnú sústavu spojenú s hmotným stredom Zeme a považujeme ju za inerciálnu sústavu. Každý bod povrchu Zeme (okrem pólov) vykonáva rovnomerný kružnicový pohyb s určitým polomerom a má preto dostredivé zrýchlenie. Vzťažná sústava spojená so Zemským povrchom preto nemôže byť inerciálna. V tom bode vzťažnej sústavy, kde je dostredivé zrýchlenie a_Z, pôsobí na teleso (v tejto vzťažnej sústave) zotrvačná (fiktívna) sila $F_Z = m\,a_Z$.

V dôsledku rotácie Zeme okolo vlastnej osi sa prejavuje maximálna zotrvačná sila na rovníku a nulová na zemskom póle. Maximálna hodnota dostredivého zrýchlenia je na rovníku

$$a_Z = R_Z\,\omega_Z^2 = R_Z\,\frac{4\pi^2}{T_{\text{deň}}^2} \approx 3{,}37\times10^{-2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 3{,}44\times10^{-3}\,g.$$

Maximálna hodnota zotrvačnej sily pôsobiacej na teleso jednotkovej hmotnosti (m = 1 kg) je

$$F_Z = m\,a_Z = m\,\omega_Z^2 R_Z = m\left(\frac{2\pi}{T_{\text{deň}}}\right)^2 R_Z \approx 3{,}37\times10^{-4}\ \text{N}.$$ 3 b

d) Je zrejmé, že pre deje pozorované na Zemi možno sústavu spojenú so Slnkom nerotujúcu voči hviezdam považovať za prakticky ideálnu inerciálnu sústavu.

V laboratórnej vzťažnej sústave spojenej s povrchom Zeme sa už pozorovateľne prejavujú zotrvačné sily v dôsledku orbitálneho pohybu okolo Slnka a vlastnej rotácie. Tieto sily treba uvažovať, ak ide o veľmi presné merania, napr. doba kmitu kyvadla (s relatívnou presnosťou až 10^{-6}). Pre bežné deje, ako napr. pohyby vozidiel, šikmý vrh a pod., sa uvedené zotrvačné sily prakticky neuplatnia a vzťažnú sústavu možno považovať za inerciálnu. 2 b

2) Zmeškaný vlak

Riešenie:

a) Cestujúci pribehne k vlaku za dobu

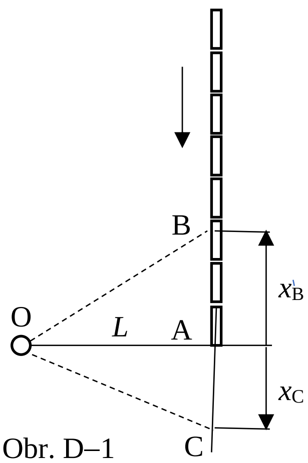
$$t_1 = \frac{L}{v} = 21{,}2\ \text{s}.$$

Vlak prešiel za túto dobu dráhu s_A zrýchleným pohybom so zrýchlením a, takže

$$s_A = \frac{N}{2}d = \frac{1}{2}a\,t_1^2 \qquad (1)$$

a získal rýchlosť

$$v_A = a\,t_1. \qquad (2)$$



Obr. D–1

Zo vzťahu (1) určíme zrýchlenie a zo vzťahu (2) rýchlosť v_A po dosadení zrýchlenia a

$$a = \frac{N}{t_1^2}d = \frac{N\,d\,v^2}{L^2} \qquad \text{a} \qquad v_A = \frac{N}{t_1}d = \frac{N\,d\,v}{L},$$

pre dané hodnoty $a \approx 0{,}13\ \text{m/s}^2$, $v_A = 2{,}83\ \text{m/s} = 10{,}2\ \text{km/h}$.

Rýchlosť vlaku v tomto prípade je bezpečná pre naskočenie. 3 b

b) Body B a C sú ďalej od bodu O, než bod A. Cestujúcemu trvá do nich dobehnúť dlhšiu dobu, vlak má na rozbeh dlhšiu dobu a preto v okamihu, keď cestujúci dobehne k vlaku, vlak má vyššiu rýchlosť, než keby bol cestujúci bežal k bodu A.

Ak sa cestujúci rozhodne bežať z bodu O tak, aby dobehol ku koncu vlaku, buď v bode B alebo v bode C, prejde vzdialenosť $l = \sqrt{L^2 + x^2}$, kde x je konca vlaku od bodu A v okamihu, keď k nemu cestujúci dobehne. Čas behu cestujúceho ku koncu vlaku

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\sqrt{L^2 + x^2}}{v} .$$

Za tento čas prejde vlak dráhu $s_A = N\,d - x$ rovnomerne zrýchleným pohybom

$$N\,d - x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \frac{L^2 + x^2}{v^2} .$$

odkiaľ dostávame po dosadení za zrýchlenie a a čas t kvadratickú rovnicu

$$x^2 + 2\frac{L^2}{N\,d} x - L^2 = 0 ,$$

ktorá má dve riešenia

$$x_{1,2} = -\frac{L^2}{N\,d} \pm \sqrt{\left(\frac{L^2}{N\,d}\right)^2 + L^2} ,$$

ktoré zodpovedajú dvom možnostiam dostihnutia konca vlaku v bodoch B a C.
Obom vzdialenostiam zodpovedajú časy

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{L^2 + x_{1,2}^2}}{v} .$$

Bodu B zodpovedá kratší čas, a teda menšia hodnota $|x_1|$, bodu C dlhší čas, a teda väčšia hodnota $|x_2|$. To znamená, že bodu B prislúcha znamienko (–) a bodu C znamienko (+) so znamienkom (–) beh v smere pohybu vlaku

$$x_B = |x_1| = L\left[\sqrt{1 + \left(\frac{L}{N\,d}\right)^2} - \frac{L}{N\,d}\right] = 23{,}4 \text{ m},$$

$$x_C = |x_2| = L\left[\sqrt{1 + \left(\frac{L}{N\,d}\right)^2} + \frac{L}{N\,d}\right] = 106{,}8 \text{ m}.$$ 2 b

Na dráhe $s_B = N\,d - x_B$ nadobudne vlak rýchlosť

$$v_B = \sqrt{2a\left(N\,d - x_B\right)} = \sqrt{2\frac{N\,d\,v^2}{L}\left(\frac{N\,d}{L} + \frac{L}{N\,d} - \sqrt{1 + \left(\frac{L}{N\,d}\right)^2}\right)} ,$$

na dráhe $s_D = N\,d + x_C$ rýchlosť

$$v_C = \sqrt{2a\left(N\,d + x_C\right)} = \sqrt{2\frac{N\,d\,v^2}{L}\left(\frac{N\,d}{L} + \frac{L}{N\,d} + \sqrt{1 + \left(\frac{L}{N\,d}\right)^2}\right)} .$$

Pre dané hodnoty $v_B \approx 3{,}13$ m/s $\approx 11{,}3$ km/h, $v_C \approx 6{,}68$ m/s $\approx 24{,}0$ km/h. 2 b

Naskočiť na vlak v mieste B je ešte pomerne bezpečné. V bode D ešte koniec vlaku dobehne, ale na naskočenie do posledného vozňa je už rýchlosť príliš vysoká. 1 b

c) V oboch bodoch A a B je rýchlosť vlaku v medziach bezpečnosti, ale nelíši sa príliš. V bode A (stred vlaku) však hrozí, že pri pošmyknutí môže cestujúci spadnúť pod vlak, zatiaľ čo pri naskakovaní na plošinu posledného vagóna by spadol iba na trať. Z tohto pohľadu sa ako najmenej riskantné naskakovanie do vlaku v bode B. 2 b

3) Gule v mori

Riešenie:

Gule majú stredné hustoty:

$$\rho_{G1} = \frac{m_1}{V_1} = \frac{6\,m_1}{\pi\,d_1^3}\text{, pre dané hodnoty } \rho_{G1} \approx 1{,}0257\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}},$$

$$\rho_{G2} = \frac{m_2}{V_2} = \frac{6\,m_2}{\pi\,d_2^3}\text{, pre dané hodnoty } \rho_{G2} \approx 1{,}0265\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}.$$

Objemy guľových telies

$$V_1 = \frac{\pi}{6}d_1^3 \text{ a } V_2 = \frac{\pi}{6}d_2^3\text{, pre dané hodnoty } V_1 \approx 14{,}14\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3},\ V_2 \approx 33{,}51\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Z hodnôt strednej hustoty gúľ a hustoty vody je zrejmé, že gule budú klesať pod hranicu h_1, ich klesanie sa však zastaví pred dosiahnutím hĺbky h_2.

a) Na guľu (2) pôsobí tiažová sila $F_{g2} = m_2\, g$ a vztlaková sily $F_{v2} = \rho_1\, V_2\, g$.
Spojovacie lanko je napínané silou $F_{L1} = F_{g2} - F_{v2} = (m_2 - \rho_1\, V_2)\, g$.
Závesné vlákno je napínané silou $F_{V1} = F_{L1} + F_{g1} = (m_1 + m_2 - \rho_1\, V_2)\, g$.
Predané hodnoty $F_{L1} \approx 0{,}841$ N , $F_{V1} = 143{,}0$ N. 3 b

b) Ak bude aj guľa (1) pod hladinou, sila napínajúca spojovacie lanko sa nezmení $F_{L2} = F_{L1}$, sila napínajúca závesné vlákno sa zmenší o vztlakovú silu gule (1)
$F_{V2} = F_{L2} + F_{g1} - F_{v1} = (m_1 + m_2 - \rho_1\, V_2 - \rho_1\, V_1)\, g$.
Pre dané hodnoty $F_{L2} = 0{,}841$ N, $F_{V2} = 1{,}043$ N. 2 b

c) Ak sústava poklesne do prechodnej vrstvy, hustota vody s hĺbkou narastá podľa vzťahu

$$\rho = \rho_1 + k\left(h - h_1\right)\text{, kde } k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_2 - h_1}.$$

Ak bude guľa (1) v hĺbke h, pôsobí na ňu sila

$$F_V = m_1\, g + F_L - \left[\rho_1 + k\left(h - h_1\right)\right] V_1\, g$$

a na guľu (2)

$$F_L = m_2\, g - \left[\rho_1 + k\left(h + a - h_1\right)\right] V_2\, g\,.$$

Sila ťahu vlákna klesá s hĺbkou

$$F_V = \left(m_1 + m_2\right) g - k\, a V_2\, g - \left[\rho_1 + k\left(h - h_1\right)\right]\left(V_2 + V_1\right) g\,.$$

V hĺbke ustálenia je $F_{V3} = 0$

$$h_3 = h_1 + \frac{\left(m_1 + m_2\right) - \rho_1\left(V_2 + V_1\right) - k\, a V_2}{k\left(V_2 + V_1\right)} =$$

$$= h_1 - \frac{a V_2}{V_2 + V_1} + \frac{\left(m_1 + m_2\right) - \rho_1\left(V_2 + V_1\right)}{\left(\rho_2 - \rho_1\right)\left(V_2 + V_1\right)}\left(h_2 - h_1\right)$$ 2 b

a sila napínajúca spojovacie lanko

$$F_{L3} = \left[m_2 - \frac{(m_1 + m_2) + k\,a V_1}{(V_2 + V_1)} V_2 \right] g =$$

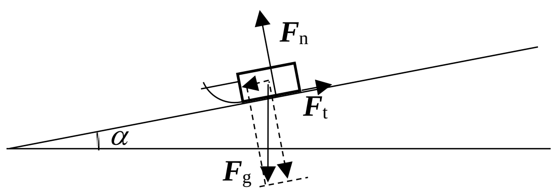
$$= \frac{1}{V_2 + V_1} \left(m_2 V_1 - m_1 V_2 - (\rho_2 - \rho_1) V_1 V_2 \frac{a}{h_2 - h_1} \right) g.$$ 2 b

Pre dané hodnoty $h_3 \approx 673{,}2$ m a $F_{L3} \approx 93{,}30$ mN. 1 b

4) Sánkari

Riešenie:

a) Na sánky pôsobia sily: tiažová $\boldsymbol{F}_g$, tlaková sila snehu $\boldsymbol{F}_n$ a sila trenia $\boldsymbol{F}_t$.



Obr. RD–1

V smere kolmom na dráhu platí

$F_n = F_g \cos\alpha = m\,g \cos\alpha$,

V smere rovnobežnom s dráhou je

$m\,a = F_g \sin\alpha - F_t$,

kde $F_t = f\,F_n = f\,m\,g \cos\alpha$.

Zrýchlenie pohybu

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Dráhu d prejdú sane so zrýchlením a za dobu

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}.$$

Odtiaľ získame faktory trenia

$$f_1 = \tan\alpha - \frac{2d}{t_1^2 g\cos\alpha} \quad \text{a} \quad f_2 = \tan\alpha - \frac{2d}{t_2^2 g\cos\alpha}.$$

Pre dané hodnoty $f_1 \approx 0{,}0264$ a $f_2 \approx 0{,}0554$. 3 b

b) V predchádzajúcej časti sme ukázali, že čas pohybu na dráhe nezávisí od hmotnosti. Časy jazdy sa nezmenia, keď sa tretí chlapec presadne na druhé sánky, teda $t_3 = t_1$ a $t_4 = t_2$. 1 b

c) Keďže faktor trenia druhých sánok je väčší, musia ísť ako druhé.

Najprv uvažujme tretieho chlapca na prvých saniach.

Zrýchlenie sústavy sánok určujú vonkajšie sily, pôsobiace na sánky

$$(2m + m_1 + m_2 + m_3)a_1 =$$
$$= (2m + m_1 + m_2 + m_3) g \sin\alpha - \left[f_1(m + m_1 + m_3) + f_2(m + m_2) \right] g \cos\alpha.$$

Odtiaľ máme zrýchlenie

$$a_1 = g\cos\alpha \left[\tan\alpha - \frac{f_1(m + m_1 + m_3) + f_2(m + m_2)}{2m + m_1 + m_2 + m_3} \right].$$

Pre pohyb prvých saní, ktoré sú brzdené ťahom F_1 špagátu, platí

$$(m + m_1 + m_3)a_1 = (m + m_1 + m_3) g \sin\alpha - f_1(m + m_1 + m_3) g \cos\alpha - F_1,$$

odkiaľ

$$F_1 = (m + m_1 + m_3)\left[g\sin\alpha - f_1\, g\cos\alpha - a_1 \right]$$

a po dosadení za zrýchlenie

$$F_1 = \frac{(m+m_2)(m+m_1+m_3)}{2m+m_1+m_2+m_3}\,(f_2-f_1)\,g\cos\alpha\,.$$

Ak sa tretí chlapec presadne na druhé sane, dostaneme rovnako

$$F_1 = \frac{(m+m_2+m_3)(m+m_1)}{2m+m_1+m_2+m_3}\,(f_2-f_1)\,g\cos\alpha\,.$$

Pre dané hodnoty $F_1 \approx 9{,}66$ N, $F_2 \approx 9{,}05$ N. 3 b

d) Pre určenie času jazdy použijeme vzťah pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu

$$d = \frac{1}{2}\,a\,t^2,\ \text{resp.}\ \ t = \sqrt{\frac{2d}{a}}\,,$$

odkiaľ dostávame

$$t_5 = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\alpha\left[\tan\alpha - \dfrac{f_1(m+m_1+m_3)+f_2(m+m_2)}{2m+m_1+m_3+m_2}\right]}}\,.$$

V druhom prípade si tretí chlapec presadne na druhé sane a rovnako dostaneme

$$t_6 = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\alpha\left[\tan\alpha - \dfrac{f_1(m+m_1)+f_2(m+m_2+m_3)}{2m+m_1+m_3+m_2}\right]}}\,.$$

Pre dané hodnoty t_5 = 19,8 s a t_6 = 20,9 s. 3 b

5) Odpojené vagóny

Riešenie:

a) Sila trenia medzi poháňanými kolesami lokomotívy a koľajnicami je vyvinutá motormi lokomotívy. Pri danom výkone a rýchlosti vlaku

$F_{\mathrm{m}} = \dfrac{P}{v_0}$. Pre dané hodnoty $F_{\mathrm{m}} \approx 13{,}5$ kN. 2 b

b) Ťahová sila lokomotívy sa rozkladá rovnomerne na prekonanie valivého trenia lokomotívy a vagónov

$$F_{\mathrm{m}} = f_1(M+Nm)\,g\,,\ \text{odkiaľ}\ \ f_1 = \frac{F_{\mathrm{m}}}{(M+Nm)\,g} = \frac{P}{v_0(M+Nm)\,g}\,.$$

Pre dané hodnoty $f_1 \approx 4{,}4\times10^{-4}$. 2 b

c) Na odtrhnutý zvyšok vlaku pôsobí sila trenia vyvolaná brzdami, pre pohyb platí

$$n\,m\,a = f_2\,n\,m\,g,\ \text{odkiaľ veľkosť zrýchlenia}\ \ a = f_2\,g\,.$$

Pre dráhu na zastavenie platí

$$d = v_0\,t - \frac{1}{2}a t_{\mathrm{z}}^2 \quad \text{a} \quad v_{\mathrm{z}} = v_0 - a\,t_{\mathrm{z}} = 0\,,$$

odkiaľ $f_2 = \dfrac{v_0^2}{2\,d\,g}$. Pre dané hodnoty $f_2 = 0{,}10$. 3 b

d) Prvá časť vlaku prekonáva silu valivého trenia $F_t = f_1\,(M + N\,m - n\,m)\,g$.

Pri ustálenej rýchlosti v_1 platí

$$F_t = \frac{P}{v_1} = f_1\,(M + N\,m - n\,m)\,g\,,$$

odkiaľ máme $v_1 = \dfrac{P}{f_1\,g\,(M + N\,m - n\,m)} = \dfrac{M + N\,m}{M + \left(N - n\right)m}\,v_0\,.$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 32{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 118\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Ak by zostala rýchlosť prvej časti vlaku v_0, musel by výkon lokomotívy klesnúť na

$$P_1 = f_1\,(M + N\,m - n\,m)\,g\,v_0 = \frac{M + \left(N - n\right)m}{M + N\,m}\,P\,.$$

Pre dané hodnoty $P_1 \approx 203$ MW. 3 b

6) Zrážky mincí

Riešenie:

a) Hustoty kovov sú $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}94\ \mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{\mathrm{Al}} = 2{,}70\ \mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{\mathrm{Zn}} = 7{,}14\ \mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{\mathrm{Sn}} = 7{,}265\ \mathrm{g/cm^3}$.

$$\rho_{\mathrm{SZ}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_{\mathrm{Cu}} + V_{\mathrm{Al}} + V_{\mathrm{Zn}} + V_{\mathrm{Sn}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m_{\mathrm{Cu}}}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \dfrac{m_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{Al}}} + \dfrac{m_{\mathrm{Zn}}}{\rho_{\mathrm{Zn}}} + \dfrac{m_{\mathrm{Sn}}}{\rho_{\mathrm{Sn}}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{p_{\mathrm{Cu}}}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \dfrac{p_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{Al}}} + \dfrac{p_{\mathrm{Zn}}}{\rho_{\mathrm{Zn}}} + \dfrac{p_{\mathrm{Sn}}}{\rho_{\mathrm{Sn}}}}\,.$$

Po dosadení $\rho_{\mathrm{SZ}} \approx 7{,}91\ \mathrm{g/cm^3}$. 1 b

b) Z hmotnosti a rozmerov určíme hustoty

$\rho = \dfrac{4\,m}{\pi\,d^2\,h}$. Pre jednotlivé funkcie $\rho_{10} \approx 6{,}93\ \mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{50} \approx 7{,}10\ \mathrm{g/cm^3}$. 1 b

Vidíme, že mince vykazujú menšiu hustotu ako zliatina. Je to spôsobené tým, že podstavy mincí nie sú rovinné, ale je v nich vylisovaný reliéf. Skutočný objem je preto menší ako objem získaný z rozmerov pre ideálny valec.

Najprv analyzujeme pružnú stredovú zrážku dvoch telies s hmotnosťami m_1 a m_2. Predpokladajme, že teleso 1 má pred nárazom rýchlosť v_{10} a teleso 2 je v pokoji. Po zrážke sú rýchlosti v_1 a v_2. Pre zrážku platí zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania mechanickej energie

$$m_1\,v_{10} = m_1\,v_1 + m_2\,v_2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}m_1\,v_{10}^2 = \frac{1}{2}m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,v_2^2\,.$$

Rovnice upravíme na tvar

$$m_1\left(v_{10} - v_1\right) = m_2\,v_2 \quad \text{a} \quad m_1\left(v_{10} - v_1\right)\left(v_{10} + v_1\right) = m_2\,v_2^2\,.$$

Odtiaľ už ľahko odvodíme

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \qquad \text{a} \qquad v_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} v_{10}\,.$$

c) Ak vychýlenú guľu pustíme, nadobudne rýchlosť v_G, ktorú určíme zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2} M\, v_G^2 = M\, g\, H = M\, g\, l\left(1 - \cos\alpha\right), \text{ odkiaľ } \; v_G = \sqrt{2\, g\, l\left(1 - \cos\alpha\right)}\,.$$

Guľa narazí rýchlosťou v_G do mince na okraji stola. V tomto prípade $M >> m$, a teda zo vzťahu pre zrážku dostávame $v_0 = 2\, v_G$, a tak

$$v_0 = 2\sqrt{2\, g\, l\left(1 - \cos\alpha\right)}\,.$$ Pre dané hodnoty $v_0 \approx 1{,}16$ m/s. 2 b

Rýchlosť nezávisí od hmotnosti mince, preto začiatočná rýchlosť oboch mincí je rovnaká.

d) Minca sa pohybuje po povrchu stola pod účinkom sily trenia

$$d_1 = v_0\, t - \frac{1}{2} a\, t^2 \qquad \text{a} \qquad v = v_0 - a\, t = 0\,.$$

Odtiaľ pre celkovú dráhu dostávame $d_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$.

Zrýchlenie je dané silou trenia $m\,a = f\; m\,g$, tzn. $a = f\, g$, a teda faktor trenia

$$f = \frac{v_0^2}{2\, d_1\, g} = \frac{4\, l\left(1 - \cos\alpha\right)}{d_1}\,.$$ Pre dané hodnoty $f \approx 0{,}097$. 2 b

e) Náraz nastane vo vzdialenosti d_2 od okraja stolu. Obidve mince na tejto dráhe získajú rýchlosť v_2, ktorú určíme napr. zo zmeny kinetickej energie rovnej práci trecej sily.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\, f\, m\, g\, d_2, \quad \text{odkiaľ} \quad v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2\, f\, g\, d_2}\,.$$

<u>Najprv menšia minca narazí do väčšej</u>. Po zrážke majú mince rýchlosti

$$v_{10} = \frac{m_{10} - m_{50}}{m_{10} + m_{50}} v_2 \quad \text{a} \quad v_{50} = \frac{2\, m_{10}}{m_{10} + m_{50}} v_2\,.$$

Keďže $v_{10} < 0$ a $v_{50} > 0$, mince sa po zrážke pohybujú na opačné strany. Mince sa účinkom trecej sily zastavia na dráhach d_{10} a d_{50}, ktoré určíme zo zmeny kinetickej energie

$$\frac{1}{2} m v_{10}^2 = d_{10}\; f\, m\, g, \quad \text{odkiaľ máme } d_{10} = \frac{v_{10}^2}{2\, f\, g} \quad \text{a rovnako} \quad d_{50} = \frac{v_{50}^2}{2\, f\, g}.$$

Vzdialenosť mincí po zastavení je

$$d_3 = d_{10} + d_{50} = \frac{1}{2\, f\, g}\left(v_{10}^2 + v_{50}^2\right)$$

a po dosadení za vypočítané veličiny dostávame výsledok

$$d_3 = \left(\, d_1 - d_2 \;\right) \frac{\left(m_{10} - m_{50}\right)^2 + 4\, m_{10}^2}{\left(m_{10} + m_{50}\right)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $d_3 \approx 23$ cm. 2 b

V druhom prípade väčšia minca narazí do menšej. Rýchlosti po zrážke sú

$$v_{50} = \frac{m_{50} - m_{10}}{m_{50} + m_{10}} v_2 \quad \text{a} \quad v_{10} = \frac{2\, m_{50}}{m_{50} + m_{10}} v_2 .$$

V tomto prípade sa po zrážke mince pohybujú v rovnakom smere. Podobne ako v predchádzajúcom prípade

$$d_4 = d_{10} - d_{50} = \frac{1}{2\, f\, g}\left(v_{10}^2 - v_{50}^2 \right).$$

Po dosadení za vypočítané veličiny máme

$$d_4 = \left(d_1 - d_2 \right) \frac{4 m_{50}^2 - \left(m_{50} - m_{10} \right)^2}{\left(m_{50} + m_{10} \right)^2} .$$

Pre dané hodnoty $d_4 \approx 65$ cm. 2 b

7) Meranie hustoty telesa – *experimentálna úloha*

Podľa úrovne spracovania 0 – 10 b.

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (2 až 6), Ivo Čáp (1, 7)
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021