63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Kategória B

Domáce kolo – riešenie úloh

1) Pohyb Mesiaca

Riešenie:

Použité hodnoty z tabuliek: hmotnosti Slnka $M_S = 1{,}989\times10^{30}$ kg, Zeme $M_Z = 5{,}974\times10^{24}$ kg a Mesiaca $M_M = 7{,}348\times10^{22}$ kg, vzdialenosť Zem–Slnko $r_{ZS} = 1{,}496\times10^{11}$ m, Zem–Mesiac $r_{ZM} = 3{,}844\times10^{8}$ m, rok $T_Z = 365{,}25$ dňa, 1 d = 24 h, gravitačná konštanta $G = 6{,}673\times10^{-11}$ N·kg^{-2}·m^{2}, rýchlosť svetla vo vákuu $c = 299\,792\,458$ m·s^{-1}.

a) Základnou jednotkou dĺžky v sústave SI je meter.

V tabuľkách nájdeme hodnotu 1 AU = 149 597 870 700 m.

Ďalšou používanou jednotkou je pc (parsek). Je to vzdialenosť, z ktorej je dĺžka 1 AU vidieť pod uhlom $\varphi = 1''$ (uhlová sekunda)

$$1\,\text{AU} = 1\,\text{pc}\times\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{360°}\,\frac{1°}{60'}\,\frac{1'}{60''}\right),\ \text{odkiaľ}\ 1\,\text{pc} = 1\,\text{AU}\times\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{360°}\,\frac{1°}{60'}\,\frac{1'}{60''}\right)^{-1} = 2{,}06265\cdot10^{5}\ \text{AU}.$$

Ďalšou jednotkou dĺžky je ly (svetelný rok – light year). Ide o vzdialenosť, ktorú svetlo prekoná za dobu 1 astronomický rok

$1\text{ ly} = c\,t_{\text{rok}} = (299\,792\,458\text{ m/s})\cdot(365{,}25\text{ d})\cdot(24\text{ h/d})\cdot3\,600\text{ s/h} = 9{,}460730\times10^{15}$ m

1 ly = 63 241 AU. 2 b

b) Sústava je z hľadiska postupného pohybu reprezentovaná hmotným stredom T, ktorý leží na spojnici stredov Zeme a Mesiaca vo vzdialenosti od stredu Zeme

$$r_{ZT} = r_{ZM}\,\frac{M_M}{M_Z + M_M} = \left(384{,}403\times10^{6}\,\text{m}\right)\frac{7{,}348\times10^{22}\ \text{kg}}{5{,}9742\times10^{24} + 7{,}348\times10^{22}\ \text{kg}} = 4{,}67054\times10^{6}\ \text{m}$$

$r_{ZT} \approx 3{,}12\times10^{-5}$ AU.

Pohyb hmotného stredu okolo Slnka predstavuje kružnicu (približne).

Polomer obiehania Mesiaca okolo spoločného hmotného stredu T

$$r_{MT} \approx r_{ZM} - r_{ZT} = r_{ZM}\,\frac{M_Z}{M_Z + M_M} \approx 3{,}7973\times10^{8}\ \text{m} \approx 2{,}54\times10^{-3}\ \text{AU}.$$ 2 b

c) Pri pohybe Mesiaca po kružnici s polomerom r_{MT} je dostredivé zrýchlenie Mesiaca rovná gravitačnému zrýchleniu gravitačného poľa Zeme v mieste Mesiaca

$$\left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2 r_{MT} = G\,\frac{M_Z}{r_{ZM}^2}\ .$$

Po dosadení za r_{MT} a úprave dostávame

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{r_{ZM}^3}{G\left(M_Z + M_M\right)}}\ .$$

Pre dané hodnoty $T_M = 2{,}358\cdot10^{6}$ s = 27,28 d. 2 b

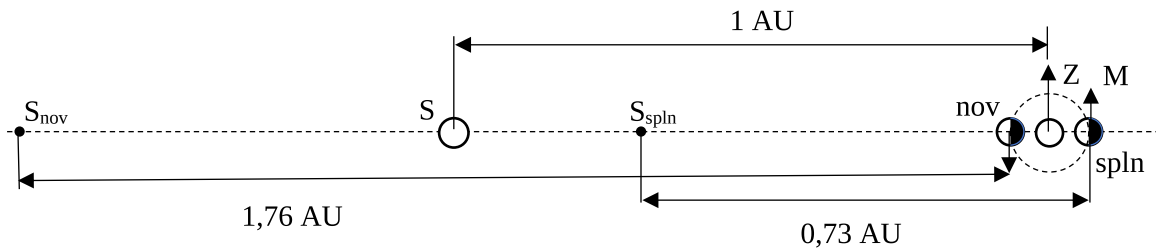
d) V nove je Mesiac najbližšie k Slnku $r_{\mathrm{nov}} = r_{\mathrm{ZS}} - r_{\mathrm{MT}}$ a pohybuje sa voči Zemi proti smeru jej obiehania okolo Slnka, v splne je najďalej $r_{\mathrm{spln}} = r_{\mathrm{ZS}} + r_{\mathrm{MT}}$ a pohybuje sa voči Zemi v smere jej pohybu po orbitálnej trajektórii. Rýchlosti Mesiaca v heliocentrickej sústave sú

$$v_{\mathrm{nov}} = v_{\mathrm{Z}} - v_{\mathrm{M}} = 2\pi\left(\frac{r_{\mathrm{ZS}}}{T_{\mathrm{Z}}} - \frac{r_{\mathrm{ZM}}}{T_{\mathrm{M}}}\right) = 2\pi\left(\frac{1{,}50\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{365{,}25\times 24\times 3600\,\mathrm{s}} - \frac{3{,}84\times 10^{8}\,\mathrm{m}}{27{,}28\times 24\times 3600\,\mathrm{s}}\right) = 28{,}77\ \mathrm{km/s},$$

$$v_{\mathrm{spln}} = v_{\mathrm{Z}} + v_{\mathrm{M}} = 2\pi\left(\frac{r_{\mathrm{ZS}}}{T_{\mathrm{Z}}} + \frac{r_{\mathrm{ZM}}}{T_{\mathrm{M}}}\right) = 2\pi\left(\frac{1{,}50\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{365{,}25\times 24\times 3600\,\mathrm{s}} + \frac{3{,}84\times 10^{8}\,\mathrm{m}}{27{,}3\times 24\times 3600\,\mathrm{s}}\right) = 30{,}89\ \mathrm{km/s}.$$

2 b

e)



Obr. RB−1

V splne na Mesiac pôsobia gravitačné sily Slnka a Zeme v rovnakom smere, a teda sa sčítajú. Výsledná sila je kolmá na okamžitý smer pohybu Mesiaca, a preto spôsobuje dostredivé zrýchlenie

$$G M_{\mathrm{M}}\left(\frac{M_{\mathrm{S}}}{\left(R_{\mathrm{ST}} + R_{\mathrm{TM}}\right)^2} + \frac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{ZM}}^2}\right) = M_{\mathrm{M}}\frac{v_{\mathrm{spln}}^2}{r_{\mathrm{spln}}},$$

kde R_{ST} je polomer trajektórie bodu T.

Odtiaľ polomer krivosti vo fáze splnu

$$r_{\mathrm{spln}} = \frac{v_{\mathrm{spln}}^2}{G}\left(\frac{M_{\mathrm{S}}}{\left(R_{\mathrm{ST}} + R_{\mathrm{TM}}\right)^2} + \frac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{ZM}}^2}\right)^{-1}.$$

V nove pôsobia gravitačné sily Slnka a Zeme v opačnom smere, a preto

$$r_{\mathrm{nov}} = \frac{v_{\mathrm{nov}}^2}{G}\left(\frac{M_{\mathrm{S}}}{\left(R_{\mathrm{ST}} - R_{\mathrm{TM}}\right)^2} - \frac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{ZM}}^2}\right)^{-1}.$$

Pre dané hodnoty $r_{\mathrm{spln}} = 1{,}095\times 10^{11}$ m = 0,73 AU, $r_{\mathrm{nov}} = 2{,}639\times 10^{11}$ m = 1,76 AU.

Stredy krivosti S_{spln} a S_{nov} sú zakreslené v obrázku. 2 b

2) Rovnovážna poloha

Riešenie:

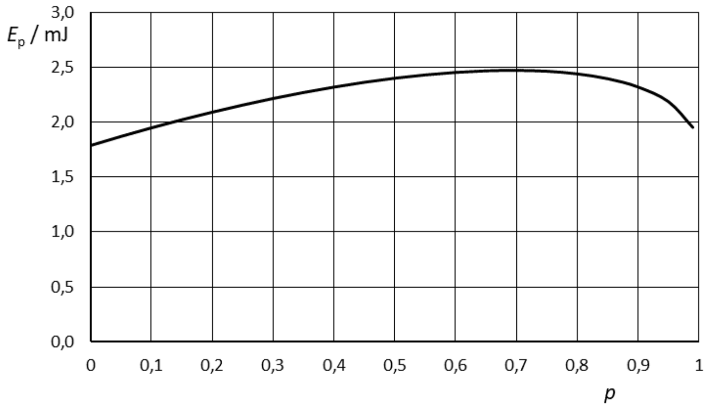
a) Potenciálna energia sústavy guľôčok je

$$E_\mathrm{p} = m_2\, g\, b \cos\alpha + m_1\, g\, a \sin\alpha \text{ , kde } b = \sqrt{l^2 - a^2} \;. \qquad 2\text{ b}$$

b) Ak zavedieme pomer $p = a/l$, potenciálnu energiu vyjadríme vzťahom

$$E_\mathrm{p} = l\, g\left(m_2 \sqrt{1-p^2}\cos\alpha + m_1\, p \sin\alpha\right)$$

a grafom



3 b

c) Ak existuje rovnovážna poloha, musí existovať lokálny extrém potenciálnej energie, ktorý sa vyznačuje nulovou hodnotou derivácie potenciálnej energie podľa premennej p

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}p} = l\, g\left(-m_2 \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\cos\alpha + m_1 \sin\alpha\right) .$$

Parameter $p = p_\mathrm{m}$ pre extrém potenciálnej energie potom platí

$$-m_2 \frac{p_\mathrm{m}}{\sqrt{1-p_\mathrm{m}^2}}\cos\alpha + m_1 \sin\alpha = 0 ,$$

odkiaľ dostávame

$$p_\mathrm{m} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)^2 + \tan^2\alpha}} .$$

Pre dané hodnoty $p_\mathrm{m} \approx 0{,}69$, čo zodpovedá hodnote pre maximum grafu. 3 b

d) Z grafu je zrejmé, že rovnovážna poloha predstavuje maximum funkcie $F_\mathrm{p}(p)$, a preto ide o polohu nestabilnú. 2 b

Pozn.:

Stabilitu možno určiť aj pomocou druhej derivácie potenciálnej energie. Podmienkou stability rovnovážnej polohy, a teda minima potenciálnej energie, je kladná druhá derivácie funkcie v bode rovnováhy.

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p = p_\mathrm{m}} = -l\, g\, m_2 \frac{1}{\left(1-p_\mathrm{m}^2\right)^{3/2}}\cos\alpha = -l\, g\, m_2\left[1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \tan^2\alpha\right]^{3/2}\cos\alpha < 0 .$$

Keďže druhá derivácia je záporná, ide o lokálne maximum, a teda nestabilnú rovnovážnu polohu.

3) Kruhový dej 1

Riešenie:

a) Z podobnosti trojuholníkov pod priamkou 1–4 máme $\frac{T_4}{V_3} = \frac{T_1}{V_1}$ a pod priamkou 2–3 $\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_2}{V_1}$.

S uvážením rovností $V_1 = V_2$ a $V_3 = V_4$ dostávame $\frac{T_4}{V_4} = \frac{T_1}{V_1}$ a $\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_2}{V_2}$, čo znamená, že deje 1–4 a 2–3 sú izobarické.

Ďalej zapíšeme zadané pomery $k = \frac{T_4}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}$, resp. $k^2 = \frac{T_4}{T_1}$ a ďalej $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_4}{T_1} = k^2$.

Účinnosť $\eta = W/Q$, kde W je práca vykonaná počas deja 1–2–3–4–1 a Q teplo dodané plynu počas cyklu v dejoch 1–2 a 2–3 (v zvyšných častiach cyklu sa teplo zo sústavy uvoľňuje).
Pri izochorických dejoch sa práca nekoná. Zostávajú teda iba izobarické deje 2–3 a 4–1.

$$W_{23} = p_2\left(V_3 - V_2\right) = \frac{nRT_2}{V_2}\left(V_3 - V_2\right) = nRT_2\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) = nR\left(T_3 - T_2\right),$$

$$W_{41} = p_1\left(V_1 - V_4\right) = \frac{nRT_1}{V_1}\left(V_1 - V_4\right) = -nRT_1\left(\frac{V_4}{V_1} - 1\right) = -nR\left(T_4 - T_1\right),$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = C_V\left(T_2 - T_1\right) = \frac{s}{2}nR\left(T_2 - T_1\right),$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} - W_{23} = C_V\left(T_3 - T_2\right) + nRT_2\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) = \left(\frac{s}{2} + 1\right)nR\left(T_3 - T_2\right),$$

kde pre jednoatómové molekuly $s = 3$.
Využijeme rovnosť $k\,T_2 = T_4$ zo zadania a vzťahy z časti b) riešenia.

$$\eta = \frac{W_{23} + W_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{nR\left(T_3 - T_2 - T_4 + T_1\right)}{\frac{s}{2}nR\left(T_2 - T_1\right) + \left(\frac{s}{2} + 1\right)nR\left(T_3 - T_2\right)}$$

a po úprave

$$\eta = \frac{nRT_1\left(\frac{T_3}{T_2}\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_4}{T_1} + 1\right)}{\frac{s}{2}nRT_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \left(\frac{s}{2} + 1\right)nRT_1\left(\frac{T_3}{T_2}\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right)} = \frac{k^3 - k - k^2 + 1}{\frac{s}{2}\left(k - 1\right) + k\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(k^2 - 1\right)}.$$

Vzťah upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$k^2\left[\eta\left(s + 2\right) - 2\right] + k\eta\left(s + 2\right) + \left(s\eta + 2\right) = 0,$$

ktorá má riešenie

$$k = \frac{\eta\left(s + 2\right) \pm \sqrt{\eta^2\left(s + 2\right)^2 + 4\left[2 - \eta\left(s + 2\right)\right]\left(s\eta + 2\right)}}{2\left[2 - \eta\left(s + 2\right)\right]},$$

pre $k > 0$ má fyzikálny zmysel znamienko (+), a teda

$$k = \frac{\eta\left(s + 2\right)}{2\left[2 - \eta\left(s + 2\right)\right]}\left[1 + \sqrt{1 + 4\frac{\left[2 - \eta\left(s + 2\right)\right]\left(s\eta + 2\right)}{\eta^2\left(s + 2\right)^2}}\right].$$

Pre dané hodnoty $k \approx 1{,}31$. 5 b

b) Pre teplotu v stave 4 máme

$T_4 = k^2\, T_1$, pre dané hodnoty $T_4 \approx 429$ K. 2 b

c) Tlaky určíme zo stavovej rovnice

$$p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} \quad \text{a} \quad p_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{nRT_1}{V_1}\frac{T_3}{T_1}\frac{V_1}{V_3} = p_1\frac{T_3}{T_2}\frac{T_2}{T_1}\frac{V_2}{V_3} = k^2\, k\frac{1}{k^2}\, p_1 = k\, p_1\,.$$

Pre dané hodnoty $p_1 \approx 924$ kPa, $p_3 \approx 1{,}21$ MPa. 3 b

4) Temperovanie vody v akváriu

Riešenie:

Za dostatočne dlhú dobu sa voda ochladí na teplotu t_0 miestnosti. Uvažujme najprv malý pokles teploty vody $|\Delta t_1| << t_1 - t_0$ za dobu τ_1, takže rozdiel teplôt $t_1 - t_0$ možno považovať v priebehu merania s dostatočnou presnosťou za konštantný. Teplo odvedené stenami vaničky $dQ = k\,(t_1 - t_0)\,\tau_1$. Toto teplo je súčasne príčinou zmeny teploty, pričom platí $dQ = \rho\, V\, c\, \Delta t_1$, kde $V = a\, b\, h$. Z porovnania dostávame koeficient prestupu tepla

$$k = -\frac{\rho V c}{t_1 - t_0}\frac{\Delta t_1}{\tau_1}. \quad (k \approx 21\ \mathrm{W{\cdot}K^{-1}}).$$ 1 b

a) Keď sa teplota zmení výraznejšie, tzn. rozdiel $t - t_0$ sa výrazne zmenší, tepelný tok stenami už nemožno považovať za konštantný. Pokles teploty musíme riešiť po malých úsekoch. Za krátku dobu $\mathrm{d}\tau$ dôjde k malej zmene teploty $\mathrm{d}t$, pričom platí

$$k(t - t_0)\,\mathrm{d}\tau = -\rho V c\,\mathrm{d}t\,, \text{ resp. } \frac{\mathrm{d}t}{t - t_0} = -\frac{k}{\rho V c}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Integrujeme pravú i ľavú stranu od začiatočných hodnôt $t = t_1$, $\tau = 0$ do konečných hodnôt $t = t_2$, $\tau = \tau_2$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}t}{t - t_0} = -\int_0^{\tau_2}\frac{k}{\rho V c}\,\mathrm{d}\tau\,, \text{ odkiaľ máme } \ln(t_2 - t_0) - \ln(t_1 - t_0) = \ln\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = -\frac{k}{\rho V c}\tau_2\,,$$

odkiaľ dostaneme

$$\tau_2 = \frac{\rho V c}{k}\ln\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = \tau_1\frac{t_1 - t_0}{(-\Delta t_1)}\ln\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}\,.$$

Pre dané hodnoty $\tau_2 \approx 69{,}3$ min ≈ 1 h $9{,}3$ min. 2 b

b) Pri ustálení teploty t_3 vody je tepelný tok z vaničky

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = P_{Q1} = k(t_3 - t_0)\,. \quad (P_Q \approx 525\ \mathrm{W})$$

Tento tepelný tok musí byť kompenzovaný výkonom ohrievača $P = U^2/R$.
Z porovnania oboch veličín dostávame odpor ohrievača

$$R_o = \frac{U^2}{P_{Q1}} = \frac{\tau_1\,(t_1 - t_0)U^2}{\rho\, a\, b\, h\, c\,(-\Delta t_1)(t_3 - t_0)}\,.$$

Pre dané hodnoty $R_o \approx 101\ \Omega$. 2 b

c) Pri teplote t_s je tepelný tok stenami vaničky

$$\frac{Q}{\Delta\tau} = P_{Q2} = k\left(t_s - t_0\right),$$

čo zodpovedá výkonu ohrievača $P_{Q2} = U_1^2/R_o$, odkiaľ

$$U_1 = \sqrt{P_{Q2}\,R_o} \approx 121{,}8\ \text{V}.$$

Na deliči napätia (dvojici rezistorov zapojených do série) s rezistormi s odpormi R a R_o sa napätie U rozdelí tak, že napätie na rezistore R_o je

$$U_1 = I\,R_o = \frac{U}{R + R_o}R_o\,,$$

odkiaľ

$$R = R_o\left(\frac{U}{U_1} - 1\right) = R_o\left(\sqrt{\frac{t_3 - t_0}{t_s - t_0}} - 1\right) = \frac{\tau_1\left(t_1 - t_0\right)U^2}{\rho\,a\,b\,h\,c\left(-\Delta t_1\right)\left(t_3 - t_0\right)}\left(\sqrt{\frac{t_3 - t_0}{t_s - t_0}} - 1\right).$$

Pre dané hodnoty $R \approx 89{,}7\ \Omega$. 2 b

d) Ako v prípade chladenia, aj v prípade zohrievania sa so zmenou teploty mení tepelný tok stenami vaničky. Opäť dej riešime po postupných krokoch. Za čas $\mathrm{d}\tau$ sa výkonom ohrievača U^2/R_o zvýši teplota z hodnoty t o $\mathrm{d}t$, pričom platí

$$\frac{U^2}{R_o}\,\mathrm{d}\tau = k\left(t - t_0\right)\mathrm{d}\tau + \rho V c\,\mathrm{d}t\,.$$

Rovnicu upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}t}{t - \left(t_0 + \dfrac{U^2}{k\,R_o}\right)} = -\frac{k}{\rho V c}\,\mathrm{d}\tau\,,$$ ktorý ďalej integrujeme

$$\int_{t_0}^{t_s}\frac{\mathrm{d}t}{t - \left(t_0 + \dfrac{U^2}{k\,R_o}\right)} = -\frac{k}{\rho V c}\int_0^{\tau_3}\mathrm{d}\tau\,,$$ odkiaľ

$$\ln\left(\frac{t_s - t_0 - \dfrac{U^2}{k\,R_o}}{-\dfrac{U^2}{k\,R_o}}\right) = -\frac{k}{\rho V c}\tau_3\,,\ \text{a teda}\ \tau_3 = -\frac{\rho V c}{k}\ln\left[1 - \left(t_s - t_0\right)\frac{k\,R_o}{U^2}\right].$$

Po dosadení za k a R_0 dostávame

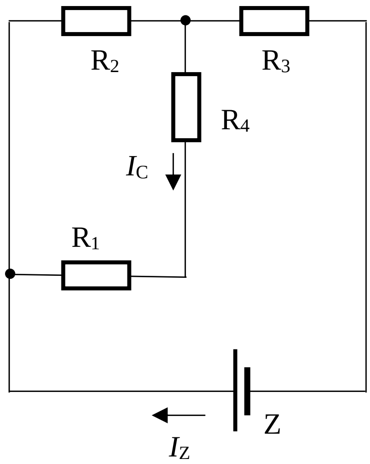
$$\tau_3 = -\frac{\rho V c}{k}\ln\left[1 - \left(t_s - t_0\right)\frac{k\,R_o}{U^2}\right] = \tau_1\frac{t_1 - t_0}{\Delta t_1}\ln\left(\frac{t_3 - t_s}{t_3 - t_0}\right).$$

Pre dané hodnoty $\tau_3 \approx 16{,}4$ min. 3 b

5) Obvod s kondenzátorom

Riešenie:

a) Na začiatku je napätie na kapacitore nulové (kapacitor vybitý cez rezistory R$_1$, R$_4$ a R$_2$). Keďže napätie na kapacitore (priamoúmerné náboju) sa môže meniť iba postupne (spojito), môžeme napätie v krátkom okamihu po zmene obvodu považovať za konštantné a rovné ustálenej hodnote pred zmenou. Pre okamih zapnutia spínača S$_1$ možno kapacitor s nulovým napätím nahradiť skratom, obr. RB–2.



Obr. RB–2

Prúd zdroja v tomto okamihu

$$I_{Z1} = \frac{U_Z}{\frac{(R_1 + R_4)R_2}{R_1 + R_4 + R_2} + R_3} .$$

Pre dané hodnoty $I_{Z1} = \frac{3\,U_Z}{5R}$ = 48 mA.

Po ustálení prechádza kapacitorom nulový prúd, tzn. rezistory R_1 a R_4 možno nahradiť skratom, kým súčasne kapacitor je zapojený paralelne k rezistoru R_2 a je na ňom napätie U_{C1}. Napätie na kapacitore v označenom smere

$$U_{C1} = -R_2 \frac{U_Z}{R_2 + R_3} .$$

Pre dané hodnoty $U_{C1} = -\frac{U_Z}{2}$ = –6,0 V

Po ustálení je prúd kapacitora nulový, preto

$I_{Z2} = \frac{U_Z}{R_2 + R_3}$, pre dané hodnoty $I_{Z2} = \frac{U_Z}{2R}$ = 40 mA. 2 b

b) V okamihu zapnutia S1 je prúd kapacitora daný pomermi v obvode na obr. RB–2.

$$I_{C1} = -I_{Z1} \frac{R_2}{R_1 + R_4 + R_2} = -\frac{U_Z}{\frac{R_2(R_1 + R_4)}{R_2 + R_1 + R_4} + R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_4 + R_2} .$$

Pre dané hodnoty $I_{C1} = -\frac{U_Z}{5R}$ = 16 mA.

Kapacitor sa nabije nábojom $Q_1 = C\,U_{C1}$. Čas potrebný na nabitie prúdom I_{C1} je

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{I_{C1}} = C\frac{R_2(R_1 + R_4) + R_3(R_2 + R_1 + R_4)}{R_2 + R_3} .$$

Pre dané hodnoty $\tau_1 = \frac{5}{2} C R \approx$ 75 ms. 2 b

c) Situáciu po zapnutí S2 (S1 je zapnutý už z prvého prípadu) znázorňuje prekreslená schéma na obr. RX–3. Uzol 2 je spojený s uzlom 3. V okamihu zapnutia S2 napätie kapacitora je rovné ustálenej hodnote U_{C1}.

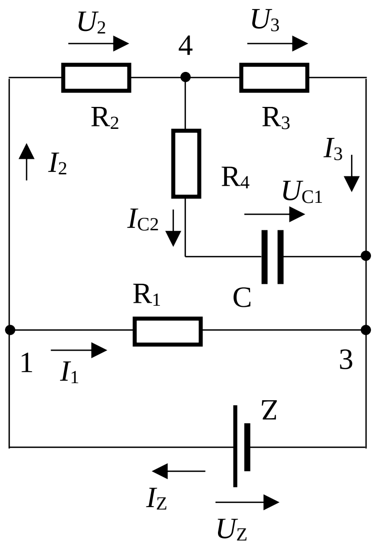
Obvod možno riešiť niekoľkými spôsobmi. Použijeme priamy výpočet. Označíme jednotlivé veličiny, obr. RX–2. V okamihu zapnutia S2 platí:

prúd zdroja $I_Z = I_1 + I_2 = \dfrac{U_Z}{R_1} + \dfrac{U_2}{R_2}$,

kde $I_2 = I_3 + I_{C2} = \dfrac{U_3}{R_3} + \dfrac{U_3 - U_{C1}}{R_4} = \dfrac{U_2}{R_2}$

a $U_Z = U_2 + U_3$.

Úpravou tejto sústavy rovníc dostávame



Obr. RX–3

$$U_2 = \frac{U_Z\left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) - \dfrac{U_{C1}}{R_4}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} = U_Z \frac{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{R_2}{R_4}\dfrac{1}{R_2 + R_3}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}$$

a ďalej

$$I_{Z3} = U_Z\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\dfrac{1}{R_2}\left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) + \dfrac{1}{R_4}\dfrac{1}{R_2 + R_3}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}\right].$$

Pre dané hodnoty $I_{Z3} = \dfrac{11}{6}\dfrac{U_Z}{R} \approx 147$ mA.

Po ustálení je prúd kapacitora nulový. Prúd zdroja je

$$I_{Z4} = \frac{U_Z}{R_1} + \frac{U_Z}{R_2 + R_3} = U_Z \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)}$$

a napätie na kapacitore

$$U_{C2} = U_3 = R_3 \frac{U_Z}{R_2 + R_3}.$$

Pre dané hodnoty $I_{Z4} = \dfrac{3}{2}\dfrac{U_Z}{R} \approx 120$ mA, $U_{C2} = \dfrac{U_Z}{2} \approx 6{,}0$ V. 2 b

d) Prúd I_{C2} kapacitora v okamihu zapnutia S2

$$I_{C2} = \frac{U_3 - U_{C1}}{R_4} = \frac{(U_Z - U_2) - U_{C1}}{R_4}.$$

Po dosadení za U_2 a úprave máme

$$I_{C2} = \frac{U_Z - U_{C1}}{R_4} - \frac{U_2}{R_4} = \frac{U_Z}{R_4}\left[1 - \frac{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{R_2}{R_4}\dfrac{1}{R_2 + R_3}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} + \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right].$$

Po zapnutí S2 sa na kapacitor dodá náboj $\Delta Q = Q_2 - Q_1 = C\,(U_{C2} - U_{C1}) = I_{C2}\ \tau_2$. Časová konštanta nabíjania kapacitora

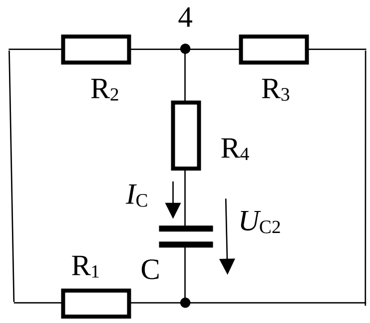
$$\tau_2 = \frac{\Delta Q}{I_{C2}} = C\,R_4\,\frac{\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}{\left[\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{R_2}{R_4}\dfrac{1}{R_2+R_3}+\dfrac{R_2}{R_2+R_3}\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)\right]}\,.$$

Pre dané hodnoty $I_{C2} = \frac{2}{3}\frac{U_Z}{R} \approx 53$ mA a $\tau_2 = \frac{3}{2}C\,R \approx 45$ ms. 2 b

e) V okamihu vypnutia S1 je $I_Z = 0$. Kapacitor sa z napätia U_{C2} vybíja cez sústavu rezistorov, obr. RB–4. Rezistory R_1 a R_2 sú zapojené sériovo a k nim paralelne R_3. K tejto zostave je sériovo zapojený R_4. Prúd kapacitora v okamihu rozopnutia S1 je tak

$$I_{C3} = \frac{U_{C2}}{R_4 + \dfrac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_3+R_1+R_2}} = U_Z\,\frac{R_3}{R_2+R_3}\,\frac{R_3+R_1+R_2}{R_4\left(R_3+R_1+R_2\right)+R_3\left(R_1+R_2\right)}\,.$$

Pre dané hodnoty $I_{C3} = \frac{3}{10}\frac{U_Z}{R} \approx$ 24 mA.



Obr. RB–4

Kapacitor sa vybíja na nulové napätie $U_{C3} = 0$. Celkový náboj kapacitora, ktorý sa vybíja

$Q_3 = C\,(U_{C2} - U_{C3})$.

Prúdom I_{C3} by sa kapacitor vybil za dobu

$$\tau_3 = \frac{Q_3}{I_{C3}}\,.$$

Po dosadení

$$\tau_3 = \frac{Q_3}{I_{C3}} = C\left[R_4 + \frac{R_3\left(R_1+R_2\right)}{R_3+R_1+R_2}\right].$$

Pre dané hodnoty $\tau_3 = \frac{5}{3}C\,R \approx 50$ ms. 2 b

6) Separácia iónov

Riešenie:

a) Uvažujme ión s hmotnosťou m a nábojom ze. V urýchľovači dochádza k zmene kinetickej energie rovnej vykonanej práci

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = z\,e\,U\,.$$

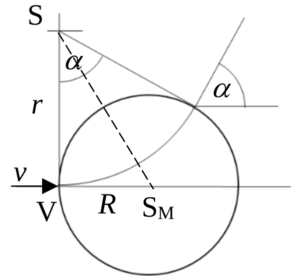
Pre $v_0 \ll v$ dostávame rýchlosť iónu

$$v = \sqrt{\frac{2\,z\,e\,U}{m}}\,.$$ 2 b

b) Ión vstúpi do magnetického poľa kolmo na smer vektora $\boldsymbol{B}$ magnetickej indukcie. Na ión pôsobí magnetická sila $\boldsymbol{F} = z\,e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ kolmá na smer vektora $\boldsymbol{v}$ rýchlosti, a teda na smer pohybu. Pohybuje sa preto rovnomerným pohybom s dostredivým zrýchlením

$$\frac{v^2}{r} = \frac{z e v B}{m}\,.$$

Polomer krivosti $r = \dfrac{m v}{z e B}$ je konštantný. Trajektória je oblúk kružnice s polomerom r a stredom S, obr. RB–5. Z pravouhlého trojuholníka SVS_M s uhlom $\alpha/2$ pri vrchole S máme



Obr. RB–5

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r} \quad \text{a po dosadení} \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{z e R B}{m v} = R B\sqrt{\frac{z e}{2 m U}}\,.$$

Hmotnosť iónu

$$m = \frac{z e}{2\,U}\left[\frac{R B}{\tan(\alpha/2)}\right]^2\,. \qquad 3\text{ b}$$

c) Pre identifikáciu iónov je vhodné vyjadriť hmotnosť v atómových hmotnostných jednotkách $m_U = 1{,}66\times10^{-27}$ kg, tzn. $m_r = m / m_U$

$$\frac{m_r}{z} = \frac{e}{2 m_U U}\left[\frac{R B}{\tan(\alpha/2)}\right]^2\,.$$

Pre dané hodnoty α_1 a α_2 dostávame pomer m_r / z rovný 23 a 40, čo zodpovedá jednomocným iónom (z = 1) Na^+ a K^+. Pre α_3 a α_4 dostávame pomer m_r / z rovný 12 a 20, čo môže zodpovedať dvojmocným iónom (z = 2) s relatívnou hmotnosťou 24 (Mg^{2+}) a 40 (Ca^{2+}), tzn. horčíka a vápnika.
3 b

Pre ión H^+ dostávame uhol vychýlenia $\alpha_H = 92{,}4°$. 2 b

7) Magnetické pole Zeme – *experimentálna úloha*

Podľa úrovne spracovania 0 – 10 b

63. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie B*

Autori návrhov úloh: Ľubomír Konrád (1 až 6), Ivo Čáp (7)
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021