MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Pre dané prvočíslo p nájdite všetky dvojice celých čísel c a d, pre ktoré platí $c > d$ a $cd = p^2$.

N2 Nájdite všetky riešenia (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslach také, že p je prvočíslo.

D1 Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$.

D2 Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

D3 Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že $(a+b)(b+c)(c+a)$ je rovné mocnine niektorého prvočísla.

D4 Nájdite všetky trojice (p, q, r) prvočísel, pre ktoré platí $(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr$.

2

N1 Ak v konvexnom štvoruholníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, tak $PQRS$ je rovnoramenný lichobežník alebo rovnobežník. Dokážte.

N2 Uvažujme situáciu zo súťažnej úlohy. Nájdite dva rovnoramenné lichobežníky s vrcholmi v bodoch A, B, C, D, E, F.

N3 Dokážte známe tvrdenie o zhodnosti uhlopriečok každého rovnoramenného lichobežníka.

D1 Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na tej istej kružnici.

D2 V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretne stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE| = |AA'|$.

D3 Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D k prepone AB. Označme E bod priamky p rôzny od D a taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

D4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Predpokladajme, že stred O kružnice opísanej trojuholníka BCD je rôzny od bodu A. Dokážte, že uhol OAC je pravý.

D5 Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB a ďalej X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec.

3

N1 Súčet deviatich navzájom rôznych číslic je 42. Ktoré sú to číslice?

N2 Navzájom rôzne číslice a, b, c, d spĺňajú rovnosť $a + b + c + 6 = d$. Ktoré sú to číslice?

N3 Päťmiestne číslo obsahuje každú z číslic 1, 3, 5, 7, 9 práve raz a súčet prvých troch číslic tohto čísla je rovný súčtu posledných troch číslic. Koľko je takých čísel?

N4 Ak by sme v zadaní súťažnej úlohy požadovali, aby sa uvažované súčty číslic rovnali 9 namiesto 10, tak by vyhovujúce číslo neexistovalo. Dokážte.

D1 Päťmiestne číslo obsahuje každú z číslic 0, 1, 3, 5, 8 práve raz a súčet prvých troch číslic tohto čísla je rovný súčtu posledných troch číslic. Určte číslicu na mieste stoviek takého čísla.

D2 Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

4

N1 Nájdite minimum funkcie f, kde $f(x) = x(x + 6)$.

N2 Určte počet riešení rovnice $x(x + 6) = k$ v závislosti na reálnom parametri k.

N3 Načrtnite grafy funkcií f a g, kde $f(x) = x \cdot |x + 6|$ a $g(x) = x \cdot |x - 6|$.

D1 V obore reálnych čísel riešte rovnicu $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálny parameter.

D2 Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia nájdite.

D3 V karteziánskej sústave súradníc znázornite množinu všetkých bodov $\langle u, v\rangle$, kde $u > 0$, pre ktoré má rovnica $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x práve tri rôzne reálne riešenia.

D4 Určte najmenšie reálne číslo m, pre ktoré je možné nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť $|x^2 + ax + b| \le m$ platila pre každé x z intervalu $[0, 2]$.

5

N1 Pripomeňte si *vetu o stredovom a obvodovom uhle* a jej dôkaz.

N2 V pravidelnom n-uholníku $A_1A_2 \dots A_n$, kde $n \ge 7$, so stredom S vyjadrite v závislosti na čísle n veľkosti uhlov A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$.

N3 Uvažujme pravidelný n-uholník $A_1A_2 \dots A_n$. Dokážte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osovej súmernosti podľa priamky A_iA_k leží na priamke A_iA_{k+l}, ak i, k, l sú prirodzené čísla splňujúce $l < k < k + l < i \le n$.

N4 V situácii zo súťažnej úlohy dokážte, že ak $n \ge 5$, tak bod A_3' leží vnútri úsečky A_1A_4.

D1 Určte, pre ktoré celé čísla n, také, že $n \ge 3$, platí: V pravidelnom n-uholníku $A_1A_2 \dots A_n$ so stredom S rozpoľuje uhlopriečka A_1A_3 úsečku A_2S.

D2 Je daný pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Priamky AB a CE sa pretínajú v bode P. Určte veľkosť uhla PDG.

D3 Je daný pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D k priamke DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

D4 Majme pravidelný 18-uholník $A_1A_2 \dots A_{18}$. Ukážte, že obrazec ohraničený uhlopriečkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdĺžnik, ale nie štvorec.

6

N1 Riešte súťažnú úlohu pre šachovnicu 1×7.

N2 Riešte súťažnú úlohu pre šachovnicu 2×2.

N3 V súťažnej úlohe pre šachovnicu 3×3 ukážte, že jej prostredné políčko bude po ľubovoľnom počte ťahov tvoriť jednoprvkovú škvrnu.

N4 V súťažnej úlohe pre všeobecnú šachovnicu $m \times n$ nájdite všetky dvojice čiernych políčok, ktoré je možné konečným počtom ťahov presunúť tak, aby spolu susedili stranou.

D1 V rade 2021 čiernych a bielych políčok je prvé čierne a každé ďalšie má inú farbu než to predošlé. Jedným krokom rozumieme vzájomnú výmenu jedného bieleho a jedného čierneho políčka, ktoré spolu nemusia susediť. Aký najmenší počet krokov potrebujeme, aby čierne políčka vytvorili jednu škvrnu?

D2 Uvažujme šachovnicu 8×8 s obvyklým ofarbením políčok. V jednom kroku môžeme „prevrátiť“ farby všetkých políčok jedného riadku, jedného stĺpca alebo jedného štvorčeka 2×2. Môžeme po konečnom počte krokov dôjsť k šachovnici s jediným čiernym políčkom?

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Pre dané prvočíslo p nájdite všetky dvojice celých čísel c a d, pre ktoré platí $c > d$ a $cd = p^2$.

Riešenie:

Pretože ± 1, $\pm p$ a $\pm p^2$ sú jediné delitele čísla p^2, rozložiť p^2 na súčin dvoch *rôznych* celých čísel je možné dvoma spôsobmi, a to $1 \cdot p^2$ a $(-1) \cdot (-p^2)$.

N2 Nájdite všetky riešenia (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslach také, že p je prvočíslo.

Riešenie:

Po rozklade pravej strany rovnice na súčin máme $p^2 = (q-2)(q-26)$. Pretože platí $q - 2 > q - 26$, sme v situácii z úlohy N1. Možnosti $q - 2 = p^2 \wedge q - 26 = 1$ a $q - 2 = -1 \wedge q - 26 = -p^2$ vedú k riešeniam $(5, 27)$ a $(5, 1)$.

D1 Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$.

Riešenie:

55. ročník, B, krajské kolo, 1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=238).

D2 Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

Riešenie:

55. ročník, C, krajské kolo, 4 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=241).

D3 Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že $(a+b)(b+c)(c+a)$ je rovné mocnine niektorého prvočísla.

Riešenie:

69. ročníka, A, domáce kolo, návodná úloha N2 6 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3379).

D4 Nájdite všetky trojice (p, q, r) prvočísel, pre ktoré platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Riešenie:

60. ročník, A, celoštátne kolo, 2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=384).

2

N1 Ak v konvexnom štvoruholníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, tak $PQRS$ je rovnoramenný lichobežník alebo rovnobežník. Dokážte.

Riešenie:

Rozlíšme, či okrem oboch podmienok zo zadania platí ešte $|PQ| = |RS|$. Ak áno, trojuholníky PQR a RSP sú zhodné podľa vety *sss*, a tak sú zhodné striedavé uhly PRQ a RPS; platí preto $QR \parallel PS$ čiže $PQRS$ je rovnobežník. V prípade, keď $|PQ| \neq |RS|$, môžeme vzhľadom na symetriu predpokladať, že $|PQ| > |RS|$. Vtedy vnútri strany PQ zvolíme bod T tak, aby platilo $|PT| = |RS|$. Spolu s $PT \parallel RS$ to potom znamená, že konvexný štvoruholník $PTRS$ je rovnobežník. Z neho a z trojuholníka TQR vidíme, že $PS \parallel TR \nparallel QR$, takže $PQRS$ je rovnoramenný lichobežník.

N2 Uvažujme situáciu zo súťažnej úlohy. Nájdite dva rovnoramenné lichobežníky s vrcholmi v bodoch A, B, C, D, E, F.

Riešenie:

$BFCD$ a $BFCE$.

Plynie to z tvrdenie uvedeného v úlohe N1.

N3 Dokážte známe tvrdenie o zhodnosti uhlopriečok každého rovnoramenného lichobežníka.

Riešenie:

Majme rovnoramenný lichobežník $PQRS$ s dlhšou základňou PQ a pokračujme v úvahách z riešenia úlohy N1: Pretože v trojuholníku TQR máme $|TR| = |QR|$, uhol RQT je zhodný s uhlom RTQ, ktorý je zhodný aj so súhlasným uhlom SPQ. Lichobežník $PQRS$ tak má zhodné oba vnútorné uhly pri základni PQ, a preto požadovaná rovnosť $|PR| = |QS|$ plynie z trojuholníkov PQR a QPS, zhodných podľa vety *sus*.

D1 Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na tej istej kružnici.

Riešenie:

63. ročník, B, domáce kolo, 3 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=1008).

D2 V ostrouhlom trojuholníku ABC sú AA' a BB' jeho výšky. Kolmý priemet bodu A' na výšku BB' označme D. Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi B, C, D pretne stranu AC v jej vnútornom bode E. Dokážte, že $|DE| = |AA'|$.

Riešenie:

70. ročník, B, domáce kolo, 3 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3472).

D3 Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D k prepone AB. Označme E bod priamky p rôzny od D a taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

Riešenie:

70. ročník, B, krajské kolo, 3 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3604).

D4 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Predpokladajme, že stred O kružnice opísanej trojuholníka BCD je rôzny od bodu A. Dokážte, že uhol OAC je pravý.

Riešenie:

67. ročník, A, domáce kolo, 5 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=2532).

D5 Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB a ďalej X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec.

Riešenie:

Česko, 55. ročník, A, domáce kolo, 3 (https://www.matematickaolympiada.cz/media/440695/A55i.pdf).

3

N1 Súčet deviatich navzájom rôznych číslic je 42. Ktoré sú to číslice?

Riešenie:

Pretože $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, sú to všetky číslice okrem $45 - 42$ čiže 3.

N2 Navzájom rôzne číslice a, b, c, d spĺňajú rovnosť $a + b + c + 6 = d$. Ktoré sú to číslice?

Riešenie:

$\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$ a $d = 9$.

Plynie to z nerovností $a + b + c \geq 0 + 1 + 2 = 3$ a $d \leq 9$.

N3 Päťmiestne číslo obsahuje každú z číslic 1, 3, 5, 7, 9 práve raz a súčet prvých troch číslic tohto čísla je rovný súčtu posledných troch číslic. Koľko je takých čísel?

Riešenie:

Číslo so zápisom $\overline{abcde}$, kde $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, je vyhovujúci, práve keď platí $a+b+c = c+d+e$ čiže $a+b = d+e$. Z poslednej rovnosti dvoch párnych čísel plynie, že súčet čísel v štvorprvkovej množine $\{a, b, d, e\}$ je deliteľný štyrmi, takže z piatich podmnožín prichádzajú do úvahy iba tri: $\{3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 3, 7, 9\}$ a $\{1, 3, 5, 7\}$. Zodpovedá im vždy jediné rozdelenie na dve dvojice s rovnakým súčtom: $3 + 9 = 5 + 7$, resp. $1 + 9 = 3 + 7$, resp. $1 + 7 = 3 + 5$. Každú vyhovujúcu štvoricu (a, b, d, e) teda určíme tak, že najprv vyberieme jednu z týchto rovností (3 možnosti), potom jednu jej stranu priradíme množine $\{a, b\}$ a druhú stranu množine $\{d, e\}$ (2 možnosti) a nakoniec rozhodneme, ktorý z dvoch priradených sčítancov je a a ktorý z dvoch priradených sčítancov je d ($2 \cdot 2$ čiže 4 možnosti). Hľadaný počet vyhovujúcich čísel je teda $3 \cdot 2 \cdot 4$ čiže 24.

N4 Ak by sme v zadaní súťažnej úlohy požadovali, aby sa uvažované súčty číslic rovnali 9 namiesto 10, tak by vyhovujúce číslo neexistovalo. Dokážte.

Riešenie:

Pripusťme existenciu vyhovujúceho čísla so zápisom $\overline{abcdefghi}$, a nezastúpenú číslicu označme j. Potom platí

$$36 = 4 \cdot 9 = (a + b + c) + (c + d + e) + (e + f + g) + (g + h + i) =$$
$$= (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) - j + (c + e + g) =$$
$$= 45 - j + (c + e + g) \geq 45 - 9 + (0 + 1 + 2) = 39,$$

a to je spor.

D1 Päťmiestne číslo obsahuje každú z číslic 0, 1, 3, 5, 8 práve raz a súčet prvých troch číslic tohto čísla je rovný súčtu posledných troch číslic. Určte číslicu na mieste stoviek takého čísla.

Riešenie:

Pre také číslo $\overline{abcde}$ sa rovnako ako v úlohe N3 odvodí podmienka $a + b = d + e$. Ukážeme, že pri zadaných čísliciach to musí byť rovnosť typu $0 + 8 = 3 + 5$ („typu“ znamená „až na poradie sčítancov aj oboch súčtov“). Najskôr rozhodneme, či číslice a, b (a teda číslice d, e) majú rovnakú paritu. Pretože máme k dispozícii dve párne číslice 0, 8 a tri nepárne číslice 1, 3, 5, v prípade rôznych parít číslic v oboch dvojiciach (a, b) a (d, e) by rovnosť $a + b = d + e$ bola typu $0 + x = 8 + y$ s vhodnými číslicami x a y z $\{1, 3, 5\}$, čo je zrejme spor. V oboch dvojiciach (a, b) a (d, e) sú teda číslice tej istej parity, takže zrejme sú to raz dve párne a raz dve nepárne číslice. Rovnosť $a + b = d + e$ je tak nutne typu $0 + 8 = x + y$, kde zrejme $x = 3$ a $y = 5$. Odtiaľ plynie $\{a, b, d, e\} = \{0, 3, 5, 8\}$. Číslica c na mieste stoviek teda nutne musí byť „zvyšná“ číslica 1. Dodajme, že skúmané päťmiestne číslo skutočne existuje, a to napr. 80135.

D2 Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Riešenie:

69. ročník, C, domáce kolo, 1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3388).

4

N1 Nájdite minimum funkcie f, kde $f(x) = x(x + 6)$.

Riešenie:

Kvadratická funkcia s kladným koeficientem pri x^2, ktorá má dva reálne korene, nadobúda svoje minimum presne uprostred medzi týmito koreňmi, v danom prípade medzi bodmi 0 a -6 čiže v bode -3, hľadaná hodnota je vtedy -9.

Je tiež možné využiť identitu $x(x + 6) = (x + 3)^2 - 9$.

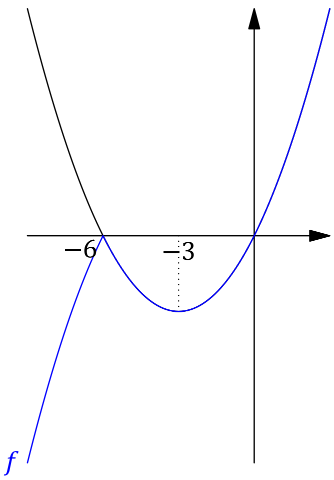
N2 Určte počet riešení rovnice $x(x + 6) = k$ v závislosti na reálnom parametri k.

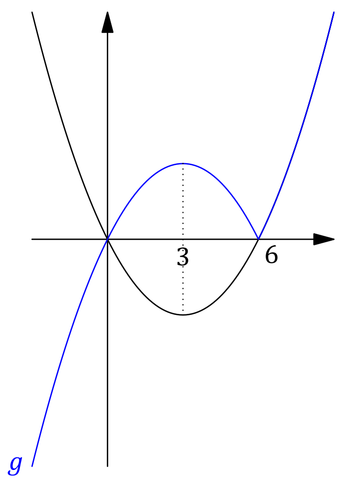
Riešenie:

Grafom kvadratickej funkcie na ľavej strane rovnice je parabola. Podľa N1 nadobúda táto funkcia minimálnu hodnotu -9. Odtiaľ plynie, že rovnica má v prípade $k = -9$ jedno riešenie, v prípade $k > -9$ dve riešenia a v prípade $k < -9$ nemá žiadne riešenie.

N3 Načrtnite grafy funkcií f a g, kde $f(x) = x \cdot |x + 6|$ a $g(x) = x \cdot |x - 6|$.

Riešenie:





D1 V obore reálnych čísel riešte rovnicu $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálny parameter.

Riešenie:

Ako algebraické, tak geometrické riešenie nájdete na stranách 45–50 brožúry *O rovnicích s parametry* (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403490) zo Školy mladých matematikov.

D2 Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia nájdite.

Riešenie:

66. ročník, B, domáce kolo, 2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=2242).

D3 V karteziánskej sústave súradníc znázornite množinu všetkých bodov $\langle u, v\rangle$, kde $u > 0$, pre ktoré má rovnica $\left|x^2 - ux\right| + vx - 1 = 0$ s neznámou x práve tri rôzne reálne riešenia.

Riešenie:

52. ročník, B, domáce kolo, 6 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=266).

D4 Určte najmenšie reálne číslo m, pre ktoré je možné nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť $\left|x^2 + ax + b\right| \leq m$ platila pre každé x z intervalu $[0, 2]$.

Riešenie:

65. ročník, A, domáce kolo, 2 http://www.skmo.sk/dokument.php?id=1728).

5

N1 Pripomeňte si *vetu o stredovom a obvodovom uhle* a jej dôkaz.

Riešenie:

Pozri strany 3–4 brožúry *Kružnice* (https://www.dml.cz/dmlcz/403592) zo Školy mladých matematikov alebo tiež komentovaný výklad na https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog.

N2 V pravidelnom n-uholníku $A_1A_2 \dots A_n$, kde $n \geq 7$, so stredom S vyjadrite v závislosti na čísle n veľkosti uhlov A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$.

Riešenie:

$|\sphericalangle A_1SA_2| = 360°/n$, $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = 180°/n$ (podľa vety o stredovom a obvodovom uhle) a $|\sphericalangle A_1A_7A_5| = |\sphericalangle A_1A_7A_2| + |\sphericalangle A_2A_7A_3| + |\sphericalangle A_3A_7A_4| + |\sphericalangle A_4A_7A_5| = 720°/n$.

N3 Uvažujme pravidelný n-uholník $A_1A_2 \dots A_n$. Dokážte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osovej súmernosti podľa priamky A_iA_k leží na priamke A_iA_{k+l}, ak i, k, l sú prirodzené čísla splňujúce $l < k < k + l < i \leq n$.

Riešenie:

Podobne ako v N2 ukážeme, že $|\sphericalangle A_{k-l}A_iA_k| = l \cdot 180°/n = |\sphericalangle A_kA_iA_{k+l}|$, a sme hotoví.

N4 V situácii zo súťažnej úlohy dokážte, že ak $n \geq 5$, tak bod A_3' leží vnútri úsečky A_1A_4.

Riešenie:

Využite to, že polpriamka A_4A_2 je os uhla $A_3A_4A_1$ a že $|A_3A_4| < |A_1A_4|$, lebo v trojuholníku $A_1A_3A_4$ platí $|\sphericalangle A_4A_1A_3| < |\sphericalangle A_1A_3A_4|$.

D1 Určte, pre ktoré celé čísla n, také, že $n \geq 3$, platí: V pravidelnom n-uholníku $A_1A_2 \dots A_n$ so stredom S rozpoľuje uhlopriečka A_1A_3 úsečku A_2S.

Riešenie:

$A_1A_2A_3S$ je deltoid, v ktorom sa uhlopriečky navzájom rozpoľujú, je to teda kosoštvorec. Preto platí $|SA_2| = |SA_1| = |A_1A_2|$, takže SA_1A_2 je rovnostranný trojuholník, preto $n = 6$. Toto n naopak zrejme vyhovuje, lebo $A_1A_2A_3S$ je vtedy kosoštvorec.

D2 CPSJ, 2021 (https://skmo.sk/dokumenty.php?rocnik=70)

Je daný pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Priamky AB a CE sa pretínajú v bode P. Určte veľkosť uhla PDG.

Riešenie:

Označme Q priesečník uhlopriečok DG a CE. Zo súmerností pravidelného sedemuholníka plynie $AB \parallel CG$, $AC \parallel DG$ a $AG \parallel CE$. Takže $APCG$ a $ACQG$ sú rovnobežníky, a preto zhodné úsečky AG, CD sú zhodné aj s úsečkami CP a CQ. Bod C je tak stredom úsečky PQ a podľa Tálesovej vety je uhol PDQ čiže PDG pravý.

D3 Je daný pravidelný sedemuholník $ABCDEFG$. Kolmica vedená bodom D k priamke DE pretína priamky CG a AB postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

Riešenie:

70. ročník, B, domáce kolo, 5 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3472).

D4 Poľsko, OMJ/OMG, 2010 (https://omj.edu.pl/zadania)

Majme pravidelný 18-uholník $A_1A_2 \dots A_{18}$. Ukážte, že obrazec ohraničený uhlopriečkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdĺžnik, ale nie štvorec.

Riešenie:

$A_2A_7 \parallel A_{10}A_{17}$ plynie z toho, že $|\sphericalangle A_7A_2A_{10}| = \frac{3}{18} \cdot 180° = |\sphericalangle A_2A_{10}A_{17}|$. Podobne $A_3A_{15} \parallel A_6A_{12}$. Označme X priesečník A_2A_7 s A_6A_{12}. Pretože $|\sphericalangle A_2A_7A_6| = \frac{4}{18} \cdot 180°$ a $|\sphericalangle A_7A_6A_{12}| = \frac{5}{18} \cdot 180°$, plynie z trojuholníka XA_7A_6, že $|\sphericalangle A_6XA_7| = \frac{9}{18} \cdot 180° = 90°$, t. j. $A_6A_{12} \perp A_2A_7$. Kým vzdialenosť strán A_6A_{12}, A_3A_{15} je rovná $|A_{12}A_{15}|$ (lebo úsečka $A_{12}A_{15}$ je na obe strany kolmá, pretože je rovnobežná s A_2A_7), tak vzdialenosť zostávajúcich dvoch strán je menšia než $|A_{12}A_{15}|$ čiže $|A_7A_{10}|$, pretože úsečka A_7A_{10} na ne kolmá nie je.

6

N1 Riešte súťažnú úlohu pre šachovnicu 1×7.

Riešenie:

Všetky čierne polia je možné ľahko spojiť do jednej škvrny.

N2 Riešte súťažnú úlohu pre šachovnicu 2×2.

Riešenie:

Dve čierne polia budú vždy v protiľahlých rohoch, vždy teda budú tvoriť dve škvrny.

N3 V súťažnej úlohe pre šachovnicu 3×3 ukážte, že jej prostredné políčko bude po ľubovoľnom počte ťahov tvoriť jednoprvkovú škvrnu.

Riešenie:

Prostredné políčko bude vždy vo svojom riadku aj vo svojom stĺpci jediným čiernym políčkom, takže nikdy nebude stranovo susediť so žiadnym iným čiernym políčkom.

N4 V súťažnej úlohe pre všeobecnú šachovnicu $m \times n$ nájdite všetky dvojice čiernych políčok, ktoré je možné konečným počtom ťahov presunúť tak, aby spolu susedili stranou.

Riešenie:

Ide o práve tie dvojice čiernych políčok, ktoré ležia v jednom riadku alebo v jednom stĺpci. Skutočne, ak ležia v rovnakom riadku (stĺpci), vystačíme s jednou vzájomnou výmenou dvoch stĺpcov (riadkov). Ak ležia, naopak, v dvoch rôznych riadkoch aj dvoch rôznych stĺpcoch, tak tento fakt sa nezmení po žiadnom ťahu.

D1 V rade 2021 čiernych a bielych políčok je prvé čierne a každé ďalšie má inú farbu než to predošlé. Jedným krokom rozumieme vzájomnú výmenu jedného bieleho a jedného čierneho políčka, ktoré spolu nemusia susediť. Aký najmenší počet krokov potrebujeme, aby čierne políčka vytvorili jednu škvrnu?

Riešenie:

505 krokov stačí, čierne políčka na nepárnych pozíciách 1013 až 2021 presunieme na párne pozície 2 až 1010. Menej nestačí, pretože pôvodne je škvŕn 1011 a každým krokom sa počet škvŕn zmenší najviac o 2 (najviac dve škvrny sa spoja do jednej a najviac jedna škvrna zanikne, prípadné zmeny ostatných škvŕn ich počet neznižujú).

D2 Uvažujme šachovnicu 8×8 s obvyklým ofarbením políčok. V jednom kroku môžeme „prevrátiť" farby všetkých políčok jedného riadku, jedného stĺpca alebo jedného štvorčeka 2×2. Môžeme po konečnom počte krokov dôjsť k šachovnici s jediným čiernym políčkom?

Riešenie:

Nie. Uvedomte si totiž, že počet čiernych políčok sa v každom kroku zmení o párny počet, teda zostane párny po ľubovoľnom počte krokov.