62. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2020/2021
kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh

1. Križovatka

Riešenie:

a) Automobily prídu do križovatky v časoch $t_A = d_A/v_A =$ 16,0 s, $t_B = d_B/v_B =$ 14,8 s. Prvý prejde automobil B z vedľajšej cesty. V tomto okamihu je vzdialenosť automobilu A od križovatky

$$d = v_A (t_A - t_B) = 30{,}0 \text{ m.}$$ 2 b

K zrážke nedôjde, ale prejazd automobilu B križovatkou je nebezpečný.

b) Automobil A prejde do vzdialenosti d_{min} za križovatku za dobu $t_{A1} = (d_A + d_{min})/v_A$. Pre dané hodnoty $t_{A1} \approx 17{,}6$ s. 1 b

Za tento čas príde automobil B ku križovatke. Najprv ide po dobu $t_{B1} = (d_B - d_1)/v_B$ rovnomerným pohybom, pre dané hodnoty $t_{B1} \approx 10{,}6$ s. Po zvyšok času $t_{B2} = t_{A1} - t_{B1}$ sa pohybuje spomaleným pohybom na dráhe d_1, pričom

$$d_1 = v_B t_{B2} + \frac{1}{2} a t_{B2}^2 ,$$ 1 b

kde t_{B2} je čas brzdenia automobilu.
Zodpovedajúce zrýchlenie je

$$a = -2 \frac{v_B (t_{A1} - t_{B1}) - d_1}{(t_{A1} - t_{B1})^2}$$. Pre dané hodnoty $a = -2{,}66$ m/s^2. 4 b

Pri zrýchlení a dosiahne automobil B na križovatke rýchlosť

$$v_B^* = v_B + a t_{B2} = \frac{2d_1}{t_{A1} - t_{B1}} - v_B$$. Pre dané hodnoty $v_B^* \approx 4{,}99$ m/s $\approx 18{,}0$ km/h. 1 b

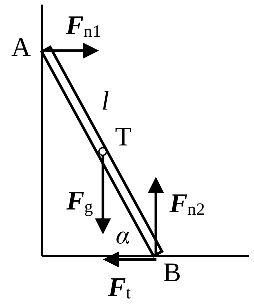
Pozn.: Za správnu možno považovať aj úvahu, že v okamihu prechodu automobilu A križovatkou je automobil B vo vzdialenosti d_{min} pred križovatkou, aj keď táto možnosť je menej efektívna.

2. Tyč opretá o zvislú stenu

Riešenie:

a) Na tyč pôsobí v ťažisku T tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$. V bode B medzi podlahou a tyčou pôsobí na tyč tlaková sila $\boldsymbol{F}_{n2}$ kolmá na podlahu a sila trenia $\boldsymbol{F}_t$. V bode A na tyč pôsobí tlaková sila steny $\boldsymbol{F}_{n1}$. 4 b

Pozn.: Dôležité je správne identifikovať 4 sily pôsobiace na tyč.



Obr. RD–1

b) V podmienkach statickej rovnováhy musí byť výslednica pôsobiacich síl a výslednica momentov týchto síl pôsobiacich na tyč nulová. V našom prípade $\boldsymbol{F}_{n1} + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_{n2} = \boldsymbol{0}$.

Z toho pre rovnováhu síl v zvislom a vodorovnom smere máme

$$F_{n1} = F_t \quad \text{a} \quad F_g = F_{n2} . \qquad (1)$$ 1 b

Pre momenty síl vzhľadom na bod B máme

$$F_g \frac{l}{2}\cos\alpha - F_{n1}\, l \sin\alpha = 0\,. \qquad (2) \qquad 1\text{ b}$$

Zo vzťahov (1) a (2) pre silu trenia dostaneme

$$F_t = \frac{F_g}{2\tan\alpha}\,.$$

V našom prípade ide o statické trenie, pre ktoré platí $F_t \le f\,F_{n2}$. 2 b

Z tejto nerovnosti dostávame podmienku pre uhol sklonu tyče

$\tan\alpha \ge \dfrac{1}{2f} = \tan\alpha_m$, resp. $\alpha_m = \arctan\left(\dfrac{1}{2f}\right)$. Pre dané hodnoty $\alpha_m \approx 63°$. 2 b

3. Satelit

Riešenie:

a) Pri pohybe satelitu po kružnicovej orbite vo vzťažnej sústave spojenej so satelitom gravitačná sila je v rovnováhe so zotrvačnou (odstredivou) silou

$G\dfrac{M\,m}{r^2} = m\,\omega_1^2\, r$, odkiaľ máme uhlovú rýchlosť satelitu $\omega_1 = \sqrt{G\dfrac{M}{r^3}}$.

Uhlová rýchlosť obehu satelitu vzhľadom na určité miesto na Zemi je

$$\omega_1^* = \omega_1 - \omega_Z = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} - \frac{2\pi}{T_D} = \frac{2\pi}{\Delta t_1}\,,$$

kde T_D = 24 h je dĺžka dňa a ω_Z uhlová rýchlosť rotácie Zeme okolo vlastnej osi.

Polomer orbity je

$$r = \sqrt[3]{G\frac{M}{4\pi^2\left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{T_D}\right)^2}}\,. \qquad (1)$$

Pre gravitačnú silu na povrchu Zeme platí $m\,g = G\dfrac{M\,m}{R^2}$. Dosadením do (1) máme

$r = \sqrt[3]{\dfrac{g\,R^2}{4\pi^2}}\left(\dfrac{1}{\Delta t_1} + \dfrac{1}{T_D}\right)^{-\frac{2}{3}}$. Pre dané hodnoty $r \approx 1{,}06\times10^7$ m $\approx 1{,}66\,R$. 4 b

b) Orbitálna rýchlosť družice je

$$v_1 = \omega_1\, r = \sqrt{G\frac{M}{r^3}}\, r = \sqrt{\frac{g\,R^2}{r}} = = \sqrt{g\,R}\sqrt{\frac{R}{r}} = v_I\sqrt{\frac{R}{r}}\,.$$

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 6{,}15$ km/s $\approx 0{,}78\,v_I$, kde $v_I \approx 7{,}9$ km/s je prvá kozmická rýchlosť. 3 b

c) Orbitálna doba obehu družice

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{G\frac{M}{r^3}}}\,.$$

Rovinu rovníka tak pretína s periódou $T_1/2$ striedavo v protiľahlom a pôvodnom bode roviny. Rovina obehu družice je stála vzhľadom na vesmír, pričom Zem sa otáča. Za tento čas medzi prechodom rovinou rovníka sa Zem otočí o uhol

$$\varphi_1 = \omega_Z \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{T_D} \frac{\pi}{\sqrt{G\frac{M}{r^3}}} .$$

Ak je nepárny násobok tohto uhla $n\,\varphi_1$ rovný nepárnemu násobku priameho uhla $N\,\pi$, družica bude prelietať nad rovnakým miestom na rovníku na opačnej strane vzhľadom na pôvodnú polohu. Ak sú násobky párne, bude prelietať nad rovnakým miestom na rovníku v pôvodnej polohe (vzhľadom na hviezdy).

Po dosadení

$$\frac{n}{N} = \frac{T_D}{2\pi}\sqrt{G\frac{M}{r^3}}$$, pre dané hodnoty $n / N \approx 8{,}0$.

Túto hodnotu môžeme dostať iba podielom párnych čísiel. To nastane pre minimálne $N = 2$, tzn. keď sa Zem otočí o uhol 2π rad za čas $\Delta t_2 = T_D = 24$ h. 3 b

Za tento čas družica vykoná 16 polobletov, tzn. 8 celých obletov okolo Zeme.

4. Guľa vo vode

Riešenie:

a) Keďže je guľa v rovnovážnej polohe, pre vztlakovú silu F_v a tiažovú silu F_g platí $\boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{F}_g = 0$, teda aj

$$m g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \text{, resp. } m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho , \qquad (1)$$ 1 b

kde m je hmotnosť celej gule.

Rovnováha hornej pologule je daná nulovou výslednicou tlakovej sily F_1, tiažovej sily F_{g1} a smerom nahor tlakovej sily dolnej pologule F_3

$$F_1 + \frac{1}{2}F_g - F_3 = 0 \text{, resp. } F_3 - F_1 = \frac{1}{2}m g . \qquad (2)$$

Rovnováha dolnej pologule je daná nulovou výslednicou tlakovej sily F_2, tiažovej sily F_{g2} a tlakovej sily hornej pologule F_3 pôsobiacej nadol. Pre veľkosti týchto síl potom platí

$$\frac{1}{2}F_g + F_3 - F_2 = 0 , \qquad (3)$$ 1 b

kde F_g je tiažová sila pôsobiaca na celú guľu.

Rozdiel síl $F_3 - F_1$ zodpovedá vztlakovej sile na hornú pologuľu, pričom tlaková sila F_3 zodpovedá pôsobeniu hydrostatického tlaku $p = R\,\rho\,g$ na plochu $S = \pi\,R^2$, tzn.

$$F_3 = p S = R \rho g \pi R^2 = \pi R^3 \rho g . \qquad (4)$$ 1 b

Pozn.: Tlaková sila pôsobiaca na hornú pologuľu je sila, ktorou by pôsobila kvapalina na kruhovú plochu s polomerom R.

Dosadením (1) a (4) do (2) máme

$$F_1 = \pi R^3 \rho g - \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho g . \qquad (5)$$ 1 b

Podobne

$$F_2 = \pi R^3 \rho g + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{5}{3}\pi R^3 \rho g. \qquad (6) \qquad 1\ \text{b}$$

b) Hľadané pomery sú dané podielmi (6) / (5) a (4) / (5)

$$q_1 = \frac{F_2}{F_1} = 5 \quad \text{a} \quad q_2 = \frac{F_3}{F_1} = 3.$$

c) Pre dané hodnoty ρ = 1,0 g/cm^3, R = 5,0 cm a g = 9,8 m/s^2 dostávame

$F_1 \approx$ 1,3 N, $F_2 \approx$ 6,4 N, $F_3 \approx$ 3,8 N, q_1 = 5, q_2 = 3. 5 b

Pozn.: $F_g \approx$ 5,1 N, *čo zodpovedá hodnote* $F_2 - F_1$.

5. Skúška pravosti

Riešenie:

a) Pri ponorení figúrky stúpne hladina vody v nádobe, pričom objem figúrky $V_{f1} = S\,h$. Hustota figúrky

$\rho_{f1} = \dfrac{M}{S\,h} = \dfrac{4M}{\pi d^2 h}$. Po dosadení $\rho_{f1} \approx$ 18,5 g·cm^{-3}. 2 b

To by znamenalo, že figúrka nie je z čistého zlata s hustotou ρ_1.

b) S ohľadom na presnosť merania zvýšenia hladiny máme h = (1,8 ± 0,3) mm. Relatívna presnosť je $\Delta h/h$ = 0,3 / 1,8 ≈ 16,7 %. 1 b

Ak dosadíme krajné hodnoty posunutia hladiny h = (1,5 ÷ 2,1) mm, dostávame výpočtom pre krajné hodnoty ρ_{f1} = (22,2 ÷ 15,9) g·cm^{-3}. 1 b

Z výsledku teda nemožno jednoznačne určiť, či figúrka je z čistého zlata. 1 b

c) S použitím uvedenej metódy je objem vo vnútri nádoby v oboch prípadoch rovnaký. Po vložení figúrky sa hmotnosť nádoby zväčší o hmotnosť figúrky $\rho_f V_f$ a zmenší o hmotnosť vody vytlačenej figúrkou $\rho_v V_f$, takže

$m_2 = m_1 + V_f\left(\rho_f - \rho_v\right)$, pričom hmotnosť figúrky $M = \rho_f V_f$.

Z oboch vzťahov určíme hustotu figúrky

$\rho_f = \dfrac{M}{M - m_2 + m_1}\rho_v$. Pre dané hodnoty ρ_f = 17,8 g·cm^{-3}. (1) 1 b

Čitateľ 82 g sa meria s veľkou presnosťou p_1 = 0,1 / 82 ≈ 0,12 %.

Presnosť hustoty ρ_v je p_2 = 0,005 / 1 ≈ 0,5 %.

Keďže v menovateli výrazu (1) je súčet (rozdiel) hmotnosti, absolútna chyba menovateľa je daná súčtom chýb jednotlivých meraní 3×0,1 g a pri hodnote menovateľa 4,6 g je presnosť určenia hustoty p_3 = 6,5 %. Presnosť výsledku (súčin, podiel) je daná súčtom presností $p = p_1 + p_2 + p_3$ = 7,12 %, čo pri hodnote hustoty 17,8 g·cm^{-3} predstavuje absolútnu chybu 1,27 g·cm^{-3}. So započítaním tejto chyby je výsledok

ρ_f = (17,8 ± 1,3) g·cm^{-3} = (19,1 ÷ 16,5) g·cm^{-3}. 2 b

Vidíme, že druhá metóda je presnejšia (porovnaním 7,12 % a 16,7 %).

d) Prvé meranie neumožňuje jednoznačne určiť, či je figúrka z čistého zlata alebo kontaminovaná striebrom.

Druhé meranie je presnejšie a rozsah určenej hustoty ukazuje, že vzorka nie je z čistého zlata. Určíme objemový podiel η striebra.

$$M = m_Z + m_S = \rho_1 V_Z + \rho_2 V_S = \rho_1 \left(V_f - V_S\right) + \rho_2 V_S = \rho_f V_f .$$

Odtiaľ určíme

$$\eta = \frac{V_S}{V_f} = \frac{\rho_1 - \rho_f}{\rho_1 - \rho_2} .$$ 1 b

Pre rozsah hustôt určený v časti c) dostávame pomer objemu striebra

η = (2,3 ÷ 32) %, priemerne 17 %.

Z výsledku vyplýva, že figúrka nebola z čistého zlata a s najväčšou pravdepodobnosťou obsahovala 17 % striebra. 1 b

6. Sústava telies spojených vláknom

Riešenie:

a) Existujú tri možnosti.

- Ak je hmotnosť závažia $m_3 \le m_{31}$, podložka s predmetom zostane v pokoji. V tomto prípade je sila ťahu vlákna $F = m_3 g$ rovná sile statického trenia $F_{t1} \le f\,(m_1 + m_2)\,g$. Odtiaľ máme

$$m_{31} = \mu\left(m_1 + m_2\right). \qquad (1)$$ 0,5 b

Zrýchlenie podložky je $a_{11} = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$. 0,5 b

- Ak je hmotnosť závažia $m_{31} < m_3 \le m_{32}$, začne sa podložka s predmetom pohybovať so zrýchlením a_{12}, pričom na predmet pôsobí proti smeru pohybu zotrvačná sila $F_{22} = m_2\,a_{12}$. Predmet zostane v pokoji vzhľadom na podložku, ak je sila trenia $F_{t2} = m_2\,a_{12} \le f\,m_2\,g$.
Sústava s hmotnosťou $m_1 + m_2 + m_3$ sa pohybuje spoločne so zrýchlením a_{12}, pričom v smere pohybu pôsobí tiažová sila závažia $m_3\,g$ a proti smeru pohybu sila trenia medzi podložkou a stolom $f\,(m_1 + m_2)\,g$.
Pohybová rovnica sústavy je

$$\left(m_1 + m_2 + m_3\right) a_{12} = m_3\,g - f\left(m_1 + m_2\right) g \ ,$$

a zrýchlenie je

$$a_{12} = \frac{m_3 - f\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 + m_2 + m_3}\,g \qquad (2)$$ 0,5 b

Z podmienky pre zrýchlenie $a_{12} \le \mu\,g$ dostávame podmienku pre hmotnosť

$$m_3 \le \frac{2f}{1-f}\left(m_1 + m_2\right) = m_{32} . \qquad (3)$$ 0,5 b

- V treťom prípade zrýchlenie a_{13} je tak veľké, že je prekročená podmienka statického trenia medzi podložkou a predmetom a pohybuje sa na podložke šmykom. Vtedy $F_{t3} = f\,m_2\,g$. Sústava podložka so závažím s hmotnosťou $m_1 + m_3$ sa pohybuje pôsobením tiažovej sily závažia $m_3\,g$ v smere pohybu, sila trenia medzi podložkou a stolom $f\,(m_1 + m_2)\,g$ a sily trenia medzi podložkou a predmetom $f\,m_2\,g$ pôsobia proti smeru pohybu.
Pohybová rovnica pre spojenú dvojicu telies s hmotnosťou $m_1 + m_3$ je

$$\left(m_1 + m_3\right) a_{13} = m_3\,g - f\left(m_1 + m_2\right) g - f\,m_2\,g .$$ 0,5 b

Zrýchlenie podložky je potom

$$a_{13}=\frac{m_3-f\left(m_1+2m_2\right)}{m_1+m_3}g\,. \qquad (4) \qquad 0{,}5\text{ b}$$

Pre $m_3 > m_{32}$ je $a_{13} > f\,g$.

Pre dané hodnoty máme $m_{31} \approx 245$ g, $m_{32} \approx 754$ g. Pre hmotnosť závažia $m_{3A} = 450$ g (druhý prípad) máme $a_{12A} \approx 1{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a pre hmotnosť závažia $m_{3B} = 900$ g (tretí prípad) $a_{13B} \approx 4{,}28\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. za každú správnu hodnotu 0,25 b 3 b

b) Pre $m_3 \le m_{31}$ zostáva sústava, v pokoji, tzn. $a_2 = 0$.

Pre $m_{31} < m_3 \le m_{32}$ zostáva predmet v pokoji vzhľadom na podložku, tzn. s podložkou má rovnaké zrýchlenie $a_{22} = a_{12}$, pozrite (2).

V treťom prípade $m_3 > m_{32}$ pôsobí na predmet sila šmykového trenia medzi podložkou a predmetom $F_t = f\,m_2\,g$, ktorá predmetu udeľuje zrýchlenie

$$a_{23} = f\,g. \qquad (5) \qquad 1\text{ b}$$

Pre dané hodnoty $m_{3A} = 450$ g je zrýchlenie predmetu $a_{22A} = a_{12A} \approx 1{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Pre $m_{3B} = 900$ g máme $a_{23B} \approx 3{,}43\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 4 x 0,25 b = 1 b

c) K zošmyknutiu predmetu môže dôjsť iba v treťom prípade.

Podložka sa pohybuje so zrýchlením a_{13} (4). Vyjadríme dráhu D podložky k okraju stolu

$$D=\frac{1}{2}a_{13}t^2\,.$$

Čas pohybu je odtiaľ

$$t=\sqrt{\frac{2D}{a_{13}}}\,.$$

Predmet sa vzhľadom na podložku pohybuje so zrýchlením $a = a_{23} - a_{13}$. Za tento čas prejde ťažisko predmetu vzhľadom na podložku dráhu $d/2$ k okraju podložky.

$$\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\left(a_{13}-a_{23}\right)t^2=\frac{1}{2}\left(a_{13}-a_{23}\right)\frac{2D}{a_{13}}=\left(1-\frac{a_{23}}{a_{13}}\right)D\,.$$

Po dosadení za pomer zrýchlení a úprave vyjadríme potrebnú minimálnu hmotnosť m_{33} závažia.

$$m_{33}=\frac{\left(2D-d\right)\left(m_1+2m_2\right)+2Dm_1}{2D\left(1-f\right)-d}f\text{ , resp.}$$

$$m_{33}=f\,\frac{4\left(m_1+m_2\right)D-\left(m_1+2m_2\right)d}{\left(1-f\right)2D-d}\,. \qquad 1\text{ b}$$

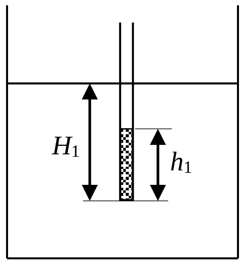
Požadovaná hmotnosť závažia $m_3 > m_{33}$. 0,5 b

Pre dané hodnoty $m_{33} \approx 3{,}45$ kg. 0,5 b

7. Skúmavka – experimentálna úloha

Riešenie:

Skúmavku vložíme do nádoby a nalejeme do nej toľko kvapaliny, aby plávala v zvislom smere. Pomocou mierky priloženej k skúmavke zmeriame hodnoty veličín h_1 a H_1, obr. RD–2.



Obr. RD–2

Potom do skúmavky prilejeme kvapalinu a zmeriame hodnoty h_2 a H_2. Podľa Archimedovho zákona je hmotnosť skúmavky s kvapalinou rovná hmotnosti vody vytlačenej ponorenou časťou skúmavky. V prvom prípade máme

$$m + \rho h_1 S = \rho_v H_1 S\,,$$

v druhom prípade

$$m + \rho h_2 S = \rho_v H_2 S\,,$$

kde ρ_v = 1,0 g/cm^3 je hustota vody a $S = \frac{\pi d^2}{4}$ obsah prierezu skúmavky, pričom d je priemer skúmavky.

Ak rovnice (1) a (2) odčítame, dostaneme po úprave

$$\rho = \rho_v \frac{H_2 - H_1}{h_2 - h_1}\,. \qquad (3)$$

Po dosadení tohto výsledku do (1) po úprave dostaneme

$$m = \rho_v S\left(H_1 - \frac{H_2 - H_1}{h_2 - h_1} h_1\right) = \rho_v \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{H_1 h_2 - H_2 h_1}{h_2 - h_1}\right). \qquad (4)$$

62. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (2 až 7), Ivo Čáp (1)
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha, Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020