56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Kategória D – domáce kolo
riešenie úloh

1. *Eskalátor*

Riešenie:

Označme rýchlosť eskalátora vzhľadom na okolie $\boldsymbol{v}_1$, rýchlosť žiaka prvý deň vzhľadom na eskalátor $\boldsymbol{v}_2$, dĺžku eskalátora d, počet schodov stojaceho eskalátora n. Podiel n / d potom udáva počet schodov pripadajúci na jednotku dĺžky eskalátora.

Ak v prvý deň pohyb žiaka i po eskalátore trval čas t_1, môžeme dĺžku eskalátora vyjadriť v tvare $d = (v_1 + v_2)t_1$.

Žiak prejde po eskalátore vzdialenosť

$$s_1 = v_2 t_1 = \frac{v_2 d}{v_1 + v_2}$$

a pritom prejde n_1 schodov

$$n_1 = s_1 \frac{n}{d} = \frac{v_2 d}{v_1 + v_2}\frac{n}{d} = n\frac{v_2}{v_1 + v_2}. \qquad (1)$$

Na druhý deň pohyb žiaka po eskalátore trval čas t_2 a pre dĺžku eskalátora máme $d = (v_1 + 3v_2)t_2$.

Žiak prejde po eskalátore vzdialenosť

$$s_2 = 3v_2 t_2 = \frac{3v_2 d}{v_1 + 3v_2}$$

a počet n_2 schodov

$$n_2 = s_2 \frac{n}{d} = \frac{3v_2 d}{v_1 + 3v_2}\frac{n}{d} = n\frac{3v_2}{v_1 + 3v_2}. \qquad (2)$$

Z výrazu (1) vyjadríme pomer

$$\frac{n}{n_1} = \frac{v_1 + v_2}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} + 1,$$

odkiaľ $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n}{n_1} - 1.$$

Z výrazu (2) vyjadríme pomer

$$\frac{n}{n_2} = \frac{v_1 + 3v_2}{3v_2} = \frac{v_1}{3v_2} + 1.$$

Po dosadení za v_1 / v_2 a po úprave dostaneme

$$n = \frac{2n_1 n_2}{3n_1 - n_2} = 100 .$$

Podľa úrovne spracovania max. 10 bodov
Možný je aj iný postup (s rovnakým výsledkom)

2. *Padajúci kameň*

Riešenie:

a) Výška jedného poschodia

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \approx 2{,}76\,\mathrm{m}. \qquad (1)$$

2 body

b) Pre pád kamienka platia podľa zadania vzťahy

$$(n-1)\,h = \frac{1}{2} g (t - t_2)^2 , \qquad (2)$$

$$n\,h = \frac{1}{2} g t^2 . \qquad (3)$$

Ak dosadíme z (1) a (3) do vzťahu (2), dostaneme

$$2 t_2 t = t_1^2 + t_2^2 .$$

Potom doba pádu kamienka je

$$t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2 t_2} .$$

Pre dané hodnoty veličín $t \approx 2{,}50\,\mathrm{s}$. **4 body**

c) Pre počet poschodí platí

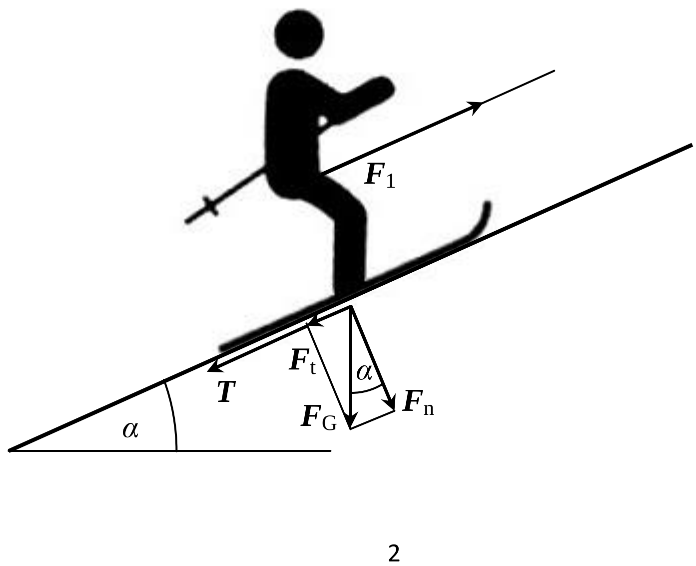
$$n = \left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2 t_1 t_2} \right)^2 .$$

Pre dané hodnoty veličín n = 11. **4 body**

3. *Lyžiar*

Riešenie:

a) Sily pôsobiace na lyžiara sú znázornené na obrázku.



Obrázok **2 body**

b) Na lyžiara pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$, tlaková sila $\boldsymbol{F}_t$ svahu , trecia sila $\boldsymbol{T}$ a ťahová sila $\boldsymbol{F}_1$ lana. Pre ich veľkosti platí:

$$F_t = mg\sin\alpha$$

$$F_n = mg\cos\alpha$$

$$T = f\,F_n = mgf\,\cos\alpha$$

Sila $\boldsymbol{F}_1$ pri rovnomernom pohybe lyžiara, kompenzuje sily pôsobiace proti smeru jeho pohybu (súčet všetkých síl pôsobiacich na lyžiara je rovný 0), takže platí

$$F_1 = mg(\sin\alpha + f\,\cos\alpha)$$

Pre dané hodnoty veličín F_1 = 342 N. **2 body**

c) Ak sa má lyžiar pohybovať smerom nahor so zrýchlením a_0, platí pre hľadanú silu

$$F_2 = F_1 + ma_0$$

Pre dané hodnoty veličín F_2 = 422 N. **1 bod**

d) Pri pohybe smerom nadol je zrýchlenie lyžiara dané vzťahom

$$a = g(\sin\alpha - f\,\cos\alpha)$$

Pre dané hodnoty veličín = 2,43 m/s^2. **1 bod**

e) Lyžiar prekoná výškový rozdiel h a prejde po svahu vzdialenosť $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Jeho pohyb po svahu je rovnomerne zrýchlený, pre jeho okamžitú rýchlosť a dráhu platia vzťahy $v_0 = at$, $s = \dfrac{1}{2}at^2$. Čas pohybu po dráhe s

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} \; .$$

Po dosadení potom určíme okamžitú rýchlosť lyžiara

$$v_0 = at = a\sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2ha}{\sin\alpha}} \; .$$

Pre dané hodnoty veličín $v_0 \approx$ 20,6 m/s = 74,3 km/h. **2 body**

f) Pre pohyb lyžiara po vodorovnej rovine platia vzťahy

$$v = v_0 - at,\; s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2,\; a = fg.$$

V okamihu zastavenia je v = 0, s = d, takže lyžiar prejde po vodorovnej rovine vzdialenosť

$$d = \frac{v_0^2}{2fg} \; .$$

Pre dané hodnoty veličín $d \approx$ 218 m. **2 body**

Pozn.: Posledný vzťah sa dá získať aj z rovnosti začiatočnej kinetickej energie lyžiara a práce sily trenia: $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = f\,m\,g\,d$.

4. *Nepružná zrážka*

Riešenie:

Ak prvá guľôčka prechádza rovnovážnou polohou rýchlosťou v_1, tak podľa zákona zachovania energie platí

$$m_1 g\, h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 .$$

Rýchlosť prvej guľôčky tesne pred nárazom do druhej guľôčky je potom

$$v_1 = \sqrt{2g\, h_1} .$$ **2 body**

Pri nepružnej zrážke guľôčok platí zákon zachovania hybnosti v tvare

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, u ,$$

odkiaľ pre rýchlosť spojených guľôčok tesne po zrážke dostaneme

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 .$$ **2 body**

Pre ďalší pohyb guľôčok platí zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 = (m_1 + m_2)\, g\, h_2 ,$$

odkiaľ pre výšku h_2, do ktorej guľôčky vystúpia, platí

$$h_2 = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h_1 .$$ **2 body**

Pre zadané hodnoty potom dostaneme:

a) $m_1 = m_2$ ... $h_2 = h_1/4 = 22{,}5$ cm.

b) $m_1 = 2m_2$ ... $h_2 = 4h_1/9 = 40$ cm.

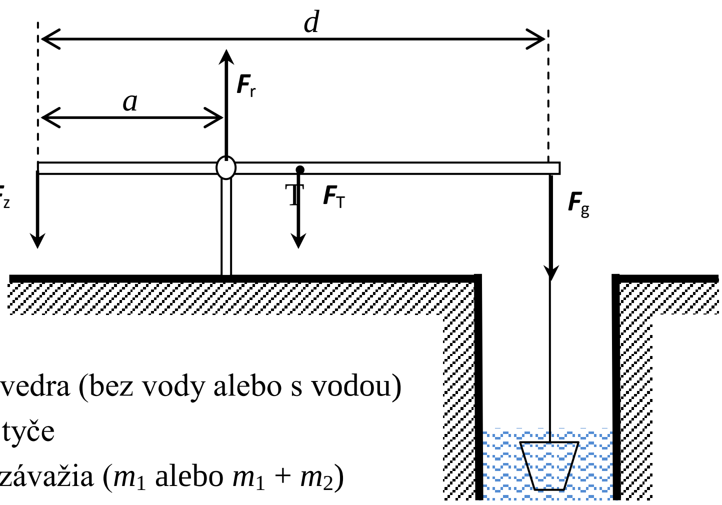
c) $2m_1 = m_2$ ... $h_2 = h_1/9 = 10$ cm. **spolu všeobecne 3 body**

číselne 1 bod

5. Studňa

Riešenie:

a) Obr. RD-1



$\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ – tiažová sila vedra (bez vody alebo s vodou)

$\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$ – tiažová sila tyče

$\boldsymbol{F}_\mathrm{z}$ – tiažová sila závažia (m_1 alebo $m_1 + m_2$)

Obrázok 2 body

b) Pre rovnováhu momentov pôsobiacich síl platí

$$m_1 g\, a = Mg\left(\frac{d}{2} - a\right) + m_0 g(d - a)\ .$$

Z tejto rovnice vyjadríme hľadanú hmotnosť

$$m_1 = M\left(\frac{d}{2a} - 1\right) + m_0\left(\frac{d}{a} - 1\right).$$

Pre dané hodnoty veličín m_1 = 9,0 kg. **4 body**

c) V druhom prípade má podmienka rovnováhy momentov tvar

$$(m_1 + m_2)g\, a = Mg\left(\frac{d}{2} - a\right) + (d - a)(m_0 g + V\rho\, g)\ .$$

Pre objem vedra potom dostávame

$$V = \frac{1}{\rho}\left[(m_1 + m_2)\frac{a}{d - a} - M\,\frac{d - 2a}{2(d - a)} - m_0\right].$$

Pre dané hodnoty veličín $V \approx 10{,}7 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 10{,}7\ l$ **4 body**

***6.* Guľa s dutinou**

Riešenie:

Objem vody v prázdnej nádobe: $V_0 = h_0 S$.
Objem vody spolu s ponorenou guľou: $V_2 = h_2 S$.
Objem samotnej gule je potom $V_g = V_2 - V_0 = (h_2 - h_0) S$.

Keď guľa pláva na hladine, pôsobí na ňu tiažová sila $F_G = m_s\, g = \rho_s\, V_s\, g$. Zároveň na guľu pôsobí vztlaková sila $F_G = (h_1 - h_0) S\, \rho_v\, g$. Z rovnosti týchto síl $\rho_s\, V_s\, g = (h_1 - h_0) S\, \rho_v\, g$ určíme objem skla

$$V_s = \frac{\rho_v}{\rho_s}(h_1 - h_0)S\ .$$

Objem dutiny je potom

$$V = V_g - V_s = (h_2 - h_0)S - \frac{\rho_v}{\rho_s}(h_1 - h_0)S\ .$$

Po dosadení a úprave

$$V = V_g - V_s = [(h_2 - h_0 - k(h_1 - h_0)]S\ .$$

10 bodov

***7.* Meranie hustoty kameňa** – experimentálna úloha

Riešenie:

Najskôr zavesíme kameň na silomer a pomocou silomera odčítame pôsobiacu silu $F_1 = mg = V\rho g$. Hustota kameňa s objemom V

$$\rho = \frac{F_1}{Vg} .$$

Potom zavesený kameň ponoríme do nádoby s vodou a pomocou silomera určíme pôsobiacu silu

$F_2 = F_1 - F_{VZ} = F_1 - V\rho_0 g$, kde ρ_0 je hustota vody.

Pre objem kameňa z predchádzajúcej rovnice platí

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_0 g} .$$

Po dosadení potom určíme hustota kameňa

$$\rho = \frac{F_1}{Vg} = \rho_0 \frac{F_1}{F_1 - F_2} .$$

Pozn.: Uvedený postup sa nazýva metóda dvojitého váženia.

Max, 10 bodov

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autor úloh:	Ľubomír Konrád
Recenzia a úprava úloh:	Daniel Kluvanec, Slavomír Tuleja,
Redakcia:	Ľubomír Konrád, Dušan Nemec
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015