55. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2013/2014

Riešenie úloh krajského kola kategórie A

5. februára 2014

1. Odporová sieť

Riešenie:

Úlohu možno riešiť viacerými metódami. Problém je v tom, že nejde o jednoduchú sériovo–paralelnú sieť, ale zloženú sieť, v ktorej vetvy sú navzájom pospájané zložitejšie, nielen sériovo–paralelne. Možné postupy:

1. Vzhľadom na to, že elektrická sieť, ktorej model je na obr. A-1, je nielen geometricky, ale aj elektricky symetrická, najvýhodnejšia metóda riešenia v tomto prípade je analýza potenciálu uzlov. V takom prípade možno v riešení urobiť zjednodušenia, ktoré sieť transformujú na jednoduchú. Pritom používame tieto zjednodušujúce úpravy:
   1a) uzly s rovnakým potenciálom možno spojiť nakrátko, tzn. do jedného uzla,
   1b) vetvu medzi dvoma uzlami s rovnakým potenciálom možno vynechať.
   V oboch prípadoch pôvodná zložená a modifikovaná jednoduchá sieť sú elektricky rovnaké.
2. Elektrickú sieť upravujeme transformáciou vetiev spojených do trojuholníka na vetvy spojené do hviezdy alebo opačne. Tieto transformácie môžeme použiť v riešení siete aj v opačnom poradí a niekoľkokrát. Tento postup je výhodný v tom, že ho možno použiť na riešenie každej siete, nielen symetrickej.
3. Z ďalších postupom možno uviesť napr. riešenie obvodu pomocou Kirchhoffových zákonov, metódou slučkových prúdov a pod.

Uvedieme len postup podľa 1. metódy pomocou potenciálnej analýzy, riešitelia však môžu použiť aj 2. metódu alebo inú metódu. Pri správnom riešení všetkými postupmi musia však dospieť k rovnakým výsledkom v jednotlivých častiach úlohy.

a) Označíme a dĺžku strany štvorca a dĺžku b spojnice uzla S s ktorýmkoľvek vrcholom štvorca $b = a / \sqrt{2}$. Potom máme $R_a = \sqrt{2}\, R_b$. V tomto prípade si predstavujeme zdroj napätia pripojený k uzlom A, C.

   Vzhľadom na uzly A a C je obvod symetrický podľa osi AC a preto potenciál bodov B, D a S je rovnaký. Uzly B, S, D možno spojiť nakrátko bez ovplyvnenia elektrických veličín v obvode vzhľadom na uzly A a C. Priečkami SB a SD prechádza nulový prúd. Po uvažovanom prepojení uzlov B, S a D sú vetvy AB, AD a AS paralelné rovnako ako vetvy BC, DC a SC. Výsledný odpor

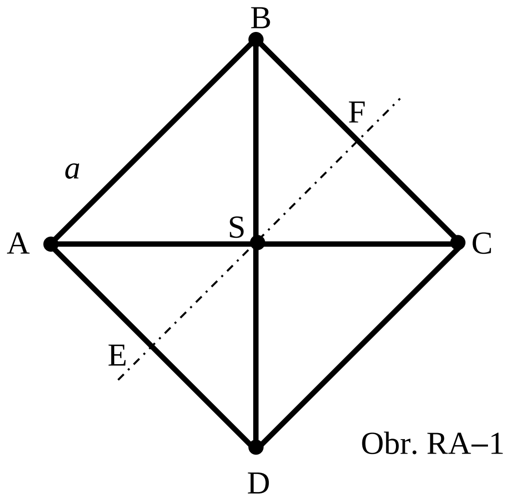
$$R_{\mathrm{AC}} = 2\,\frac{1}{\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_a}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}\,R_a = (2-\sqrt{2})\,R_a\,, \qquad \textbf{2 body}$$

   odkiaľ dostaneme

$$R_a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\,R_{\mathrm{AC}}\,.$$ Pre dané hodnoty $R_a \approx 17{,}1\ \Omega$. **0,5 bodu**

Vzhľadom na vyššie uvedený princíp potenciálnej analýzy elektrického obvodu, možno postupovať aj tak, že najskôr priečne vetvy SB a SD hypoteticky odstránime z obvodu (podľa bodu 1b) v úvode). Dostaneme rovnaký výsledok $R_a \approx 17{,}1\ \Omega$.

b) V tejto úlohe rozloženie potenciálu od hypotetického zdroja pripojeného k uzlom A, D je také, že body E, S a F majú rovnaký potenciál a možno ich spojiť nakrátko do jedného uzla bez vplyvu na obvod. V tomto prípade je obvod symetrický vzhľadom na os EF, obr. RA–1.



Obr. RA–1

Vetvy AE a AS sú paralelné, rovnako aj BS a BF. Odpor R_{AD} je

$$R_{\mathrm{AD}} = 2\frac{1}{\dfrac{1}{R_a/2}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_a+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_a/2}}}} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}R_a = \frac{8+5\sqrt{2}}{10+6\sqrt{2}}R_{\mathrm{AC}} = \frac{10+\sqrt{2}}{14}R_{\mathrm{AC}}\,.$$

Pre dané hodnoty $R_{\mathrm{AD}} \approx 8{,}15\ \Omega$. **2 + 0,5 bodu**

V tomto prípade možno tiež, vzhľadom na potenciálovú symetriu, v bode S priečne vetvy rozdeliť tak, že BS a CS vetvy zostanú spolu, rovnako aj vetvy AS a DS, avšak v bode S sa navzájom rozdelia. Obvod sa tým zmení, vzhľadom k uzlom A, D na jednoduchý sériovo – paralelný.

c) Ak uvažujeme zdroj pripojený k uzlom A a S, obvod bude elektricky symetrický vzhľadom na os AS. Uzly B a D majú rovnaký potenciál a môžeme ich spojiť nakrátko. Paralelné vetvy sú tak AB a AD, SB a SD, BC a CD.

$$R_{\mathrm{AS}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{\dfrac{R_a}{2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_b/2}+\dfrac{1}{R_b+R_a/2}}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}R_a = \frac{3+2\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}R_{\mathrm{AC}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}R_{\mathrm{AC}}.$$

Pre dané hodnoty $R_{\mathrm{AS}} \approx 6{,}31\ \Omega$. **2 + 0,5 bodu**

d) Použijeme model z predchádzajúceho bodu (body B a D spojené). Prúd zdroja $I = U/R_{\mathrm{AS}}$. Spojkou medzi uzlami A a S prechádza prúd $I_{\mathrm{AS}} = U/R_b$. Vetvou medzi uzlami A a B≡D prechádza prúd $I_{\mathrm{A(BD)}} = I - I_{\mathrm{AS}}$. Ten sa delí do paralelných vetiev (BD)S a (BD)CS. Prúd druhou vetvou je hľadaný prúd I_{SC}. Pre delič prúdu platí

$$I_{\mathrm{SC}} = I_{\mathrm{A(BD)}}\frac{R_b/2}{R_b/2+R_a/2+R_b} = \left(\frac{U}{R_{\mathrm{AS}}}-\frac{U}{R_b}\right)\frac{R_b}{R_a+3R_b} =$$

$$= \frac{U}{R_a}\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{U}{R_{\mathrm{AC}}}\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{U}{R_{\mathrm{AC}}}\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Pre dané hodnoty $I_{\mathrm{SC}} \approx 206\ \mathrm{mA}$. **2 + 0,5 bodu**

2. Magnetická šošovka

Riešenie:

a) Elektrické pole s intenzitou $E = U / d$ udeľuje elektrónom v smere osi zrýchlenie d veľkosťou $a = e\,E / m$. Preto pohyb elektrónov v smere osi je rovnomerne zrýchlený. Magnetické pole pôsobí iba na elektróny, ktoré majú zložku rýchlosti kolmú na smer magnetickej indukcie, tzn. $\alpha \neq 0$. Magnetická sila je kolmá na os a neovplyvňuje pohyb elektrónov v smere osi. Magnetická sila je kolmá na zložku rýchlosti kolmú na os, preto nevyvolá jej zmenu (v priemete pohybu kolmom na os ide o rovnomerný pohyb), ale mení smer pohybu elektrónov. V priemete kolmom na os ide o pohyb po kružnici. Elektróny konajú zložený pohyb, trajektória elektrónov je *skrutkovica s narastajúcim stúpaním*. Elektrón prejde stredom otvoru, ak za čas pohybu smerom k hornej elektróde vykoná v priemete kolmom na os celočíselný násobok uzavretých kružníc.

3 body

b) V priemete kolmom na os platí pre rovnováhu magnetickej a odstredivej sily

$$m\frac{v_\perp^2}{R} = e\,v_\perp\,B\text{, kde } v_\perp = v_0 \sin\alpha\,.$$

V homogénnom magnetickom poli (B = konšt.) je konštantný aj polomer krivosti R (pohyb po kružnici) elektrónov a uhlová rýchlosť ω pohybu elektrónov po kružnici

$$R = \frac{m v_0 \sin\alpha}{eB} \qquad \omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{eB}{m}\,.$$

Kružnica sa začína a končí na osi sústavy, preto pre prechod otvorom musí elektrón prekonať v priemete kolmom na os za čas pohybu k hornej elektróde celočíselný násobok dĺžky celej kružnice. Maximálna vzdialenosť od osi počas pohybu potom je

$$x_\mathrm{m} = 2R = \frac{2 m v_0 \sin\alpha}{eB}\,.$$

Pre podmienku $x_\mathrm{m} = r$ dostaneme pre uhol vzťah

$$\sin\alpha_1 = \frac{reB}{2 m v_0}$$. Pre dané hodnoty veličín $\alpha_1 = 1{,}76\times10^{-2}$ rad ($\approx 1{,}0°$). **1 bod**

Elektróny emitované pod uhlom $\alpha < \alpha_1$ prejdú otvorom pri akomkoľvek kladnom napätí $U > 0$, pri ktorom dosiahnu hornú elektródu.

V prípade záporného napätia $U < 0$ sú elektróny elektrickým poľom medzi elektródami brzdené a podmienka dosiahnutia hornej elektródy je $U > U_\mathrm{m}$, pričom platí

$$-eU_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v_0^2\text{, tzn. } U_\mathrm{m} = -\frac{m}{2e} v_0^2\,.$$ Pre dané hodnoty $U_\mathrm{m} \approx -11{,}4$ V.

Pre hodnoty napätia $U < U_\mathrm{m}$ elektróny nedosiahnu hornú elektródu. **1 bod**

c) Ak má prejsť elektrón stredom otvoru, musí za čas pohybu medzi elektródami v kolmom priemete prekonať najmenej jednu celú kružnicu.

Pohyb v smere osi je rovnomerne zrýchlený so začiatočnou rýchlosťou $v_0 \cos\alpha$. Pre vzdialenosť polohy elektrónu od dolnej elektródy máme

$$y = v_0 t \cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{eU}{md} t^2 .$$

Pre posunutie $y = d$ dostaneme pre čas t_0 pohybu medzi elektródami kvadratickú rovnicu

$$t_0^2 + 2\frac{m d v_0}{eU} t_0 \cos\alpha - \frac{2md^2}{eU} = 0 \quad ,$$

ktorej riešenie je

$$t_0 = \frac{m d v_0}{eU} \cos\alpha \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2eU}{m v_0^2 \cos^2\alpha}} \right).$$

Keďže čas $t_0 > 0$, fyzikálny zmysel má znamienko +. **1 bod**

Aby elektrón prešiel stredom otvoru pri minimálnom napätí U_0, musí za čas t_0 prejsť jednu celú kružnicu, tzn. $\omega t_0 = 2\pi$. Tak dostaneme rovnicu

$$\frac{eB}{m}\frac{m d v_0}{eU} \cos\alpha \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2eU}{m v_0^2 \cos^2\alpha}} \right) = 2\pi .$$

Pre $\alpha << 1$ rad je $\cos\alpha \approx 1$. Po dosadení do predchádzajúcej rovnice dostaneme

$$\sqrt{1 + \frac{2eU_0}{m v_0^2}} = \frac{2\pi U_0}{d\, B v_0} + 1$$

a po umocnení na druhú a úprave máme

$$U_0 = \frac{v_0}{2}\left(\frac{d\ B}{\pi}\right)^2 \left(\frac{e}{m\, v_0} - \frac{2\pi}{d\ B}\right).$$ Pre dané hodnoty $U_0 \approx 229$ V **2 body**

d) Smer pohybu je daný smerom vektora rýchlosti. Uhol β určíme zo vzťahu $\mathrm{tg}\beta = v_\perp / v_{\parallel 0}$, kde $v_\perp$ je priečna a $v_{\parallel 0}$ pozdĺžna zložka rýchlosti pri prechode otvorom.

Veľkosť priečnej zložky rýchlosti elektrónu sa počas pohybu nemení a pri prechode otvorom je $v_\perp = v_0 \sin\alpha$.

Veľkosť pozdĺžnej zložky sa mení v dôsledku zrýchlenia. Pri prechode otvorom je

$$v_{\parallel 0} = v_0 \cos\alpha + a t_0 = v_0 \cos\alpha \sqrt{1 + \frac{2eU_0}{m v_0^2 \cos^2\alpha}} \approx v_0 \sqrt{1 + \frac{2eU_0}{m v_0^2}} .$$

Ak uvážime vzťahy $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{v_\perp}{v_0 \cos\alpha} \approx \alpha$ a $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{v_\perp}{v_{\parallel 0}} \approx \beta$,

dostaneme uhlové zväčšenie

$$z = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{v_0 \cos\alpha}{v_{\parallel 0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2eU_0}{m v_0^2 \cos^2\alpha}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2eU_0}{m v_0^2}}} .$$

Pre dané hodnoty veličín $z \approx 0{,}22$. **2 body**

Pozn.: V prípade $U > 0$ je zväčšenie $z < 1$, ak je $U_m < U < 0$, je $z > 1$.

3. *Emisia gama fotónov*

Riešenie:

a) Energia fotónu súvisí s jeho hmotnosťou vzťahom $E_f = m\,c^2$, z ktorého máme

$m = \dfrac{E_{f0}}{c^2}$. Pre dané hodnoty $m \approx 4{,}23\times10^{-32}$ kg, čo je 4,65 % m_e. **1 bod**

Vlnová dĺžka fotónu je

$\lambda_0 = \dfrac{h}{p_f} = \dfrac{h}{m\,c} = \dfrac{h\,c}{E_{f0}}$. Pre dané hodnoty $\lambda_0 \approx$ 5,22×10^{-11} m. **1 bod**

b) Pri emisii fotónu musia byť splnené zákony zachovania energie a hybnosti. Pred emisiou sú hodnoty obidvoch veličín nulové. Po emisii má fotón energiu E_f a hybnosť p_f a atóm cínu kinetickú energiu E_k a hybnosť p, pričom zmena vnútornej energie atómu je $-\Delta E$. Zákony zachovania vyjadríme v tvare

$0 = p_f - p,$ $\qquad$ $0 = E_f + E_k - \Delta E.$ **1 bod**

Po dosadení za jednotlivé veličiny dostaneme

$\dfrac{h}{\lambda} = p\,,$ $\qquad$ $\dfrac{h\,c}{\lambda} + \dfrac{p^2}{2M} = \Delta E\,.$ **1 bod**

Ak z rovníc vylúčime hybnosť atómu, dostaneme kvadratickú rovnicu

$\left(\dfrac{h}{\lambda}\right)^2 + 2M\,c\dfrac{h}{\lambda} - 2M\,\Delta E = 0\,,$ **1 bod**

ktorej riešenie je

$$\frac{h}{\lambda} = M\,c\left[-1 \pm \sqrt{1+2\frac{\Delta E}{M\,c^2}}\right].$$

Keďže $\lambda_1 > 0$, fyzikálny zmysel má iba znamienko +, tzn.

$\lambda = \dfrac{h}{M\,c}\left[-1+\sqrt{1+2\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}\right]^{-1} = \lambda_0\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}\left[-1+\sqrt{1+2\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}\right]^{-1}.$ **1 bod**

Odchýlka vlnovej dĺžky

$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \dfrac{\lambda_0\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}{-1+\sqrt{1+2\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}} - \lambda_0 = \lambda_0\dfrac{1+\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}-\sqrt{1+2\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}}{\sqrt{1+2\dfrac{\Delta E}{M\,c^2}}-1}.$ **1 bod**

Vzhľadom na to, že výraz $x = \Delta E / M\,c^2 \approx 2{,}14\times10^{-7} << 1$, použijeme pri úprave čitateľa náhradu odmocniny trojčlenom podľa zadania

$1+x-\sqrt{1+2x} \approx 1+x-\left(1+x-(1/2)x^2\right) = (1/2)x^2$. Vidíme, že náhrada dvojčlenom by v tomto prípade dala nulu, a preto táto substitúcia by nebola dostatočne presná. V menovateli však stačí náhrada dvojčlenom $-1+\sqrt{1+2x} \approx -1+(1+x) = x$. S použitím týchto aproximácií dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1+\frac{\Delta E}{M c^2} - \sqrt{1+2\frac{\Delta E}{M c^2}}}{\sqrt{1+2\frac{\Delta E}{M c^2}} - 1} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta E}{M c^2}\,.$$ **1 bod**

Pre dané hodnoty veličín $\Delta\lambda / \lambda_0 \approx 1{,}07\times10^{-7}$. **0,5 bodu**

Kinetická energia atómu po emisii fotónu

$$E_\mathrm{k} = \Delta E - \frac{hc}{\lambda} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{hc}{\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1}{2}\frac{(\Delta E)^2}{M c^2}\,.$$ **1 bod**

Pre dané hodnoty $E_\mathrm{k} \approx 2{,}54$ meV ($\approx 4{,}07\times10^{-22}$ J). **0,5 bodu**

4. *Teplotné vyžarovanie vlákna*

Riešenie:

a) Tepelný výkon platinového vlákna $P = U I$ pri prechode elektrického prúdu sa prejaví zvýšením teploty vlákna. Po vytvorení rovnováhy je elektrický príkon vlákna rovný výkonu žiarenia vychádzajúceho z povrchu vlákna

$$U I = S\sigma\left(T^4 - T_0^4\right),$$ **1 bod**

kde $S = \pi\, d\, l$ je obsah povrchu vlákna, T termodynamická teplota povrchu vlákna a T_0 termodynamická teplota okolia. Napätie $U = R\, I$, odpor vlákna $R = \rho\, l / S_\mathrm{p}$, obsah kolmého prierezu vlákna $S_\mathrm{p} = \pi\, d^2/ 4$. Rezistivita vlákna a tým i odpor vlákna sa menia s teplotou približne lineárne podľa vzťahu $\rho = \rho_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$.

Po dosadení a úprave, pre teplotu T_t tavenia platiny, pre prúd I_m máme

$$I_\mathrm{m} = \pi\sqrt{\frac{d^3\sigma\left(T_\mathrm{t}^4 - T_0^4\right)}{4\rho_0\left[1+\alpha\left(T_\mathrm{t} - T_0\right)\right]}} \approx 6{,}8 \text{ A}.$$ **3 body**

b) Pre rovnovážny stav pri teplote t_1 dostaneme rovnicu

$$R_0\left[1+\alpha\left(T_1 - T_0\right)\right]\, I_1^2 = S\sigma\left(T_1^4 - T_0^4\right),$$

ktorú môžeme upraviť napr. na tvar

$$\frac{S\sigma}{R_0 I_1^2}T_1^4 - \alpha T_1 - \left(\frac{S\sigma}{R_0 I_1^2}T_0^4 + 1 - \alpha T_0\right) = 0\,.$$ **2 body**

Rovnicu možno riešiť numericky. Pre dané hodnoty má tvar

$$AT_1^4 + BT_1 + C = 0\,,$$

kde $A = \dfrac{S\sigma}{R_0 I_1^2} = \dfrac{\pi^2 d^3\sigma}{4\rho_0 I_1^2} \approx 8{,}32\times10^{-11}\ \mathrm{K}^{-4}$, $B = -\,\alpha \approx -3{,}9\times10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$,

$$C = -\left(\frac{S\sigma}{R_0 I_1^2}T_0^4 + 1 - \alpha T_0\right) = -A T_0^4 - 1 + \alpha T_0 \approx -\,0{,}470.$$

Označíme ľavú stranu y a hľadáme hodnotu T_1, pri ktorej $y = 0$. Použijeme najprv hrubý krok po 100 K. Ohraničenie intervalu riešenia má opačné znamienko a riešenie je bližšie k tej hranici, ktorá je bližšie k nulovej hodnote. Postupným zjemňovaním intervalu riešenia určíme hľadanú hodnotu s ľubovoľnou presnosťou.

T_1 [K]	300	400	390	395	394	394,1
y	-0,967	0,0999	-0,0662	0,0149	$-1{,}63\times10^{-3}$	$1{,}78\times10^{-5}$

V našom prípade je dostatočne presným riešením rovnice hodnota $T_1 = 394$ K, resp. $t_1 \approx 121$ °C. **3 body**

Pre túto hodnotu teploty dostaneme napätie voltmetra

$U_1 = R_0\left[1+\alpha\left(t_1 - t_0\right)\right] I_1$. Pre dané hodnoty veličín $U_1 \approx 74{,}6$ mV. **1 bod**

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1), Ivo Čáp (2 – 4)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014